В.К.Егерев, Б.А.Радунский, Д.А.Тальский

МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

В книге рассматриваются методы построения графиков функций как элементарными способами, так и с помощью элементов математического анализа.

Предлагается общая схема исследования функций и частные методы построения графиков. Приводятся только те необходимые математические понятия и соответствующие правила, на основании которых даются методы построения графиков.

Рассматривается достаточное количество примеров на исследование и построение графиков функций.

Пособие предназначается для студентов вузов и может быть использовано преподавателями средних специальных учебных заведений, средних школ, а также при подготовке для поступления в вузы.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Введение 4

Глава I Общие сведения о функциях

§ 1. Определение функции 10

§ 2. Элементарные функции —

§ 3. Предел функции и понятие о непрерывности функции 15

Глава II. Элементы поведения функции

§ 1. Область определения и точки разрыва 24

§ 2. Четность и нечетность 29

§ 3 Периодичность 31

§ 4. Нули функции 34

§ 5. Интервалы знакопостоянства 35

§ 6. Асимптоты —

§ 7. Экстремумы и интервалы монотонности 41

§ 8. Точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции 47

§ 9. Область изменения функции 49

Глава III. Общая схема исследования функций

§ 1. Содержание общей схемы исследования функций 52

§ 2 Практическое применение общей схемы исследования функций 54

Глава IV. Частные методы построения графиков функций

§ 1 Построение графиков функций путем движения без деформаций 73

§ 2 Построение графиков функций путем сдвига и деформациями 91

§ 3 Построение графиков функций, аналитические выражение которых содержат знак модуля 103

§ 4. «Алгебра графиков» 111

Глава V. Некоторые геометрические места точек

Глава VI. Краткие сведения о построении графиков в полярной системе координат

§ 1. Полярная система координат 137

§ 2. Графики некоторых кривых в полярной системе координат 140
Литература 148

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель настоящей книги — дать систематизированное изложение методов построения графиков элементарных функций.

В пособии рассматриваются элементы поведения функций в той последовательности, которой методически целесообразно пользоваться при исследовании функций по общей схеме, а также частные методы построения графиков, позволяющие в некоторых случаях обойтись без общей схемы исследования.

В отличие от уже существующих пособий по построениям графиков функций в данном пособии дается систематизация функций не по видам, а по методам построения их графиков.

Такое изложение представляется целесообразным для оказания помощи студентам университетов и педагогических институтов при подготовке их к педагогической практике, а также выпускникам средних школ при их подготовке к вступительным экзаменам в вузы.

В книге приведено достаточное количество примеров, раскрывающих методику построения графиков функций, даны примеры для упражнений, а в конце каждой главы имеются вопросы для повторения.

ВВЕДЕНИЕ

Материальное единство мира проявляется во взаимосвязи и взаимообусловленности различных явлений и процессов, происходящих в природе. При рассмотрении этих явлений приходится учитывать изменения одних величин в зависимости от изменения других. Например: при рассмотрении движения мы устанавливаем зависимость пройденного пути от времени; при определении площадей плоских фигур мы можем указать зависимость между площадью круга и его радиусом; при изучении теплового действия тока — зависимость количества выделяемого тепла от величины тока, сопротивления проводника и времени протекания тока.

Следует отметить, что характер зависимости и степень определенности связи между рассматриваемыми величинами могут быть различными.

Раскрытие связей и установление зависимостей между величинами, участвующими в том или ином процессе, ведет к открытию определенных законов и является главной задачей естественных и технических наук.

Например, урожай в том или ином месте зависит от количества выпавших за сезон атмосферных осадков, а вес человека зависит от его роста. Но эти зависимости не отличаются большой степенью определенности: указания количества выпавших осадков или роста человека совершенно недостаточно для определения урожая или веса человека. Очевидно, такого рода зависимости не являются определяющими для того или другого процесса.

Рассмотрим другой пример: зависимость пути от времени при равномерном движении $s = vt$.

Эти зависимость является вполне определенной, так как каждому значению времени t соответствует (при заданной скорости v) вполне определенное значение пути s.

Такая зависимость является *функциональной.*

В основе понятия функциональной зависимости лежит не просто зависимость, а полная определенность соответствия между переменными величинами.

Переменную величину s называют функцией другой переменной величины t, если каждому значению величины t (из некоторой области) поставлено в соответствие вполне определенное значение величины s. Такое по смыслу определение функции впервые было дано гениальным русским математиком Н. И. Лобачевским. Термин «функция» введен Лейбницем. Символическая запись функциональной зависимости $s=f(t)$, $s=\varphi(t)$ и т. п. впервые введена Л. Эйлером.

Само понятие функциональной зависимости отражает объективные закономерности природы — подвижность и взаимную обусловленность реальных величин. Данное понятие является основным во всей высшей математике, и потому правильное объяснение его в средней школе — важная предпосылка к усвоению курса высшей математики.

Таким образом, функция определяется как соответствие между значениями двух переменных величин. При этом способ установления этого соответствия (называемый способом задания функции) принципиального значения не имеет и никакого влияния на функциональную зависимость не оказывает. Исторически первым способом задания функции был способ *аналитический* — при помощи формулы. Аналитический способ задания функции оказался столь удобным средством исследования, что функцию стали отождествлять с ее аналитическим выражением, содержание понятия стали смешивать с формальным аппаратом.

Возникла объективная необходимость освободить понятие функции от теснящих ее рамок формулы. Это «освобождение» было сделано в первой половине прошлого столетия: было дано указанное выше определение функции, в котором нет никакого упоминания не только об аналитическом выражении, но и вообще о способе установления соответствия. Из определения функции следует, что для ее задания необходимо указать два множества чисел (значений аргумента и функции) и закон соответствия между ними. Это может быть сделано четырьмя способами: таблицей, аналитически (формулой), графически и словесно.

Табличный способ задания функции

При данном способе задания функции в определенном порядке выписываются значения аргумента: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, а затем соответствующие им значения функции: y_1, y_2, y_3, ..., y_n. Таковы, например, таблицы тригонометрических функций, кубов чисел, мантисс логарифмов и др. Табличный способ часто применяется в естествознании и технике, где результаты эксперимента записываются обычно в таблицу. Например, при исследовании зависимости величины постоянного тока I (известно, что общее сопротивление R есть величина постоянная) от величины напряжения U получена таблица 1.

Таблица 1

U (вольт)	3	6	9	12	15
I (ампер)	1	2	3	4	5

Этой таблицей установлена функциональная зависимость

$$I = f(U).$$

Преимущество табличного способа заключается в простоте нахождения значений функции по значению аргумента. По таблице можно найти значения функции без каких-либо измерений и вычислений. Однако таблица не дает полного представления об изменении функции в зависимости от аргумента. Естественно, что, определяя значения функции по значениям аргумента, не указанным в таблице, без расчетов не обойтись. К недостаткам этого способа следует отнести и отсутствие достаточной наглядности.

Аналитический способ задания функции

Способ состоит в том, что задается формула, при помощи которой по заданным значениям аргумента можно определить соответствующие значения функции.

Например: функциональная зависимость, установленная табл. 1, может быть записана формулой

$$I = \frac{U}{R} \text{ (закон Ома).}$$

Аналитический способ имеет преимущества: компактность задания; возможность подсчета y для любого x; возможность применения аппарата математического анализа для исследования. К недостаткам относятся: недостаточная наглядность; возможная трудность вычислений.

Графический способ задания функции

Графиком функции (в декартовой прямоугольной системе координат) называют *геометрическое место точек, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции.* Очевидно, что функция может быть задана и своим графиком. Например, на рис. 1 изображен график функциональной зависимости, определенной табл. 1. Такой способ часто применяется в естествознании, технике и т. д., например при использовании самопишущих приборов, автоматически записывающих изменение одной величины в зависимости от изменения другой.

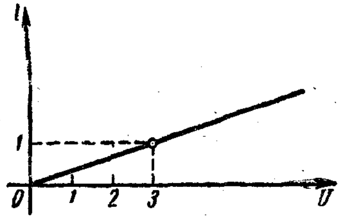


Рис. 1

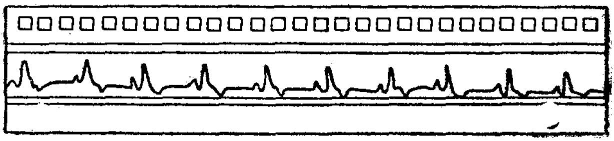


Рис. 2

На рис. 2 изображена электрокардиограмма собаки Лайки в состоянии невесомости.

Функции, заданные аналитически, могут быть изображены и графически. К графику, как и к таблице, нельзя непосредственно применить аппарат математического анализа, но график имеет неоспоримое преимущество перед остальными способами задания функции — наглядность. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рис. 3, можно многое узнать о «поведении» этой функции. При увеличении аргумента x функция сначала возрастает (до $x = -2$), а после $x = -2$ безгранично убывает по мере приближения аргумента x к нулю. При положительных значениях x функция только возрастает. В двух точках (при $x = -1$ и $x = 1$) график функции пересекает ось абсцисс, т. е. в этих точках $y=0$ и данная функция меняет знак. Если при $x<-1$ функция положительна (график расположен выше оси абсцисс, $y>0$), то при $-1<x<0$ функция отрицательна ($y<$ <0). При $x=0$ функция не определена и т. д.

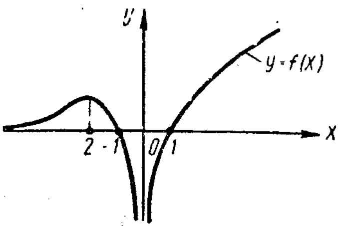


Рис. 3

Словесный способ задания функции

Функция может быть задана и словесно, т. е. описательно. Например, так называемая функция Дирихле задается следующим образом: функция y равна 0 для всех рациональных и 1 для всех иррациональных значений аргумента x. Такая функция не может быть задана таблицей, так как она определяется на всей числовой оси и множество значений ее аргумента бесконечно; графически данная функция также не может быть задана. Аналитическое выражение для этой функции было все же найдено, но оно так сложно, что не имеет практического значения. Словесный же способ дает краткое и ясное ее определение.

Из всех указанных способов задания функции наибольшие возможности для применения аппарата математического анализа дает аналитический способ, а наибольшей наглядностью обладает графический. Вот почему математический анализ основывается на глубоком синтезе аналитических и геометрических методов. Исследование функций, заданных аналитически, проводится гораздо легче и становится наглядным, если параллельно рассматривать и графики этих функций. Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить исследование квадратных уравнений и решение неравенств второй степени с одним неизвестным при помощи исследования графиков квадратных трехчленов; исследование систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными при помощи рассмотрения возможных случаев взаимного расположения двух прямых на плоскости.

Отсюда видно, что умение строить графики функций, заданных аналитически, является важным элементом в общей математической подготовке учащихся.

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФУНКЦИЯХ

§ 1. Определение функции

Определение 1. *Переменная величина y называется функцией другой переменной величины x, если каждому значению x из некоторой области поставлено в соответствие вполне определенное значение величины y.*

Во введении указывалось, что для задания функции необходимо задать два множества (значений x и значений y) и закон соответствия между ними. Там же рассмотрены и возможные способы задания этого соответствия: табличный, аналитический, графический и словесный. В данной книге рассматриваются только вещественные функции вещественного аргумента, т. е. x и y всегда должны быть вещественными.

§ 2. Элементарные функции

К основным элементарным функциям относятся следующие:

1) степенная функция $y = x^n$, где n — вещественное число;

2) показательная функция $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$ и $a\neq 1$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y=\operatorname{tg} x$ и т. д.;

5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$; $y = \arccos x$ и т. д.

Графики основных элементарных функций см. на рис. 4, *а, б, в, г, д, е, ж, з, и, к, л, м.*

Основные элементарные функции могут соединяться между собой с помощью арифметических действий (сложения, вычитания, умножения и деления) и с помощью операции *взятия функции от функции.* Пусть $y= f(u)$, а $u = \varphi(x)$, тогда $y = f[\varphi(x)] = F(x)$ является сложной функцией от x. Например, $y = \sin^3 x$ — кубическая функция аргумента ($y = u^3$), который в свою очередь является тригонометрической функцией независимой переменной x ($u = \sin x$). Такое задание сложной функции называется еще цепным заданием. При этом цепь функций, при помощи которых строится сложная функция, может состоять не только из двух звеньев, как в приведенном примере, но и из любого их числа.

Из *основных элементарных* функций строятся *эле-*

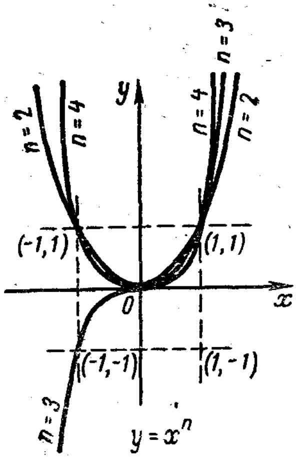


Рис. 4, *а*

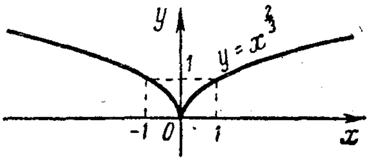


Рис. 4, *б*

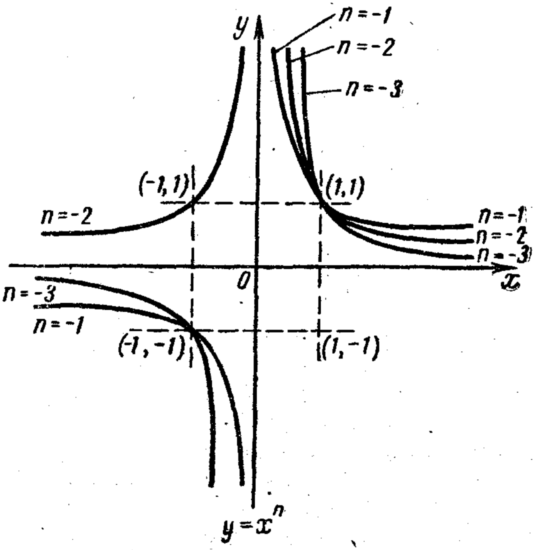
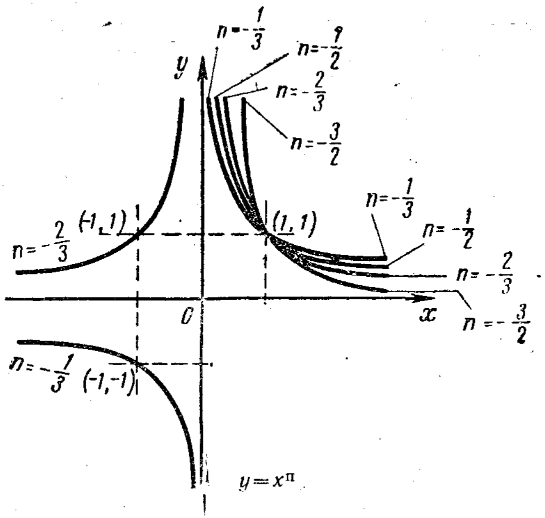
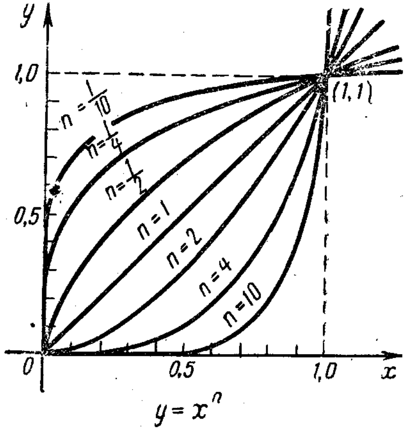


Рис. 4, *в*



y
$n=-\frac{1}{3}$
$n=-\frac{1}{2}$
$n=-\frac{2}{3}$
$n=-\frac{3}{2}$
$n=-\frac{2}{3}$
(-1, 1)
(1, 1)
$n=-\frac{1}{3}$
$n=-\frac{1}{2}$
$n=-\frac{2}{3}$
$n=-\frac{3}{2}$
0
x
$n=-\frac{1}{3}$
(-1, -1)
$y=x^n$

Рис. 4, *г*



y
1,0
$n=\frac{1}{10}$
$n=\frac{1}{4}$
$n=\frac{1}{2}$
0,5
n=1
n=2
n=4
n=10
(1, 1)
0
0,5
1,0
x
$y=x^n$

Рис. 4, *д*

ментарные функции. *Элементарной* называют такую функцию, которую можно задать одной формулой, составленной из *основных элементарных функций* при по-

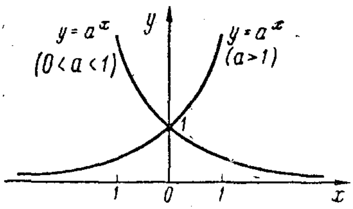


Рис. 4, *е*

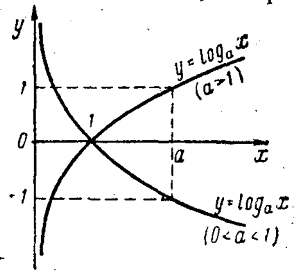


Рис. 4, *ж*

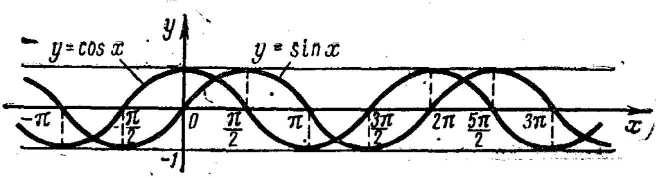


Рис. 4, *з*

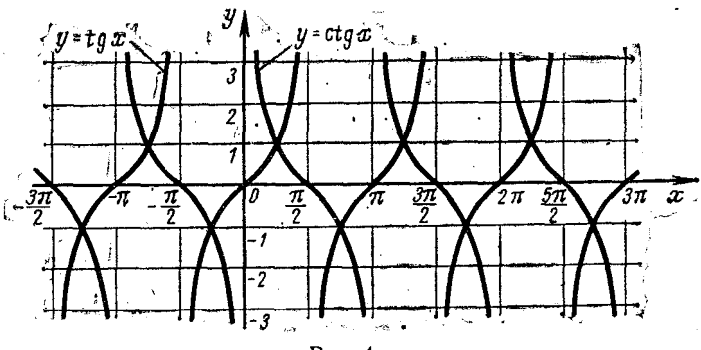


Рис. 4, *и*

мощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции. Например, функции: $y=2\sin x+3\log x$; $y=\sqrt{\sin x+\cos x}$; $y=x+\operatorname{tg} x$ являются элементарными.

Однако при изучении различных процессов, происходящих в природе, приходится встречаться с функциями, для аналитического задания которых одной формулы мало. Например, если нагревать какое-либо кристаллическое тело (железо, медь, серебро, лед и др.), то можно заметить, что его температура повышается до момента

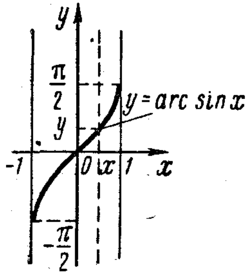


Рис. 4, к

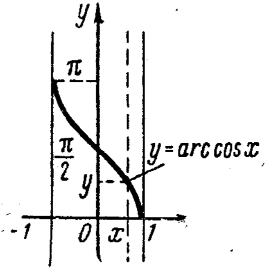


Рис. 4, л

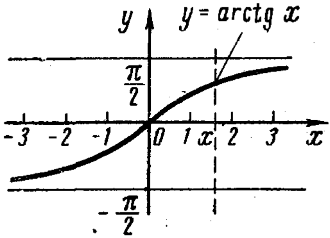


Рис. 4, м

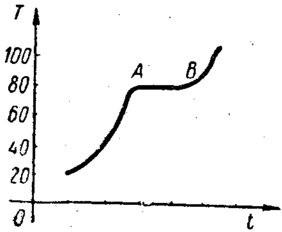


Рис. 5

начала плавления, во время плавления температура тела остается неизменной, а после того как тело перейдет в жидкое состояние, дальнейшее нагревание приводит к повышению температуры жидкости. На рис. 5 показан график плавления нафталина. Температура тела является функцией времени t нагревания, и очевидно, что для задания этой функции на всей области ее определения одной формулы недостаточно: на участке AB зависимость проста: $T = \text{const}$, а вне этого участка зависимость гораздо сложнее и для ее выражения понадобится другая формула.

Таким образом, возникает необходимость изучения функций, заданных на разных участках разными формулами. Простейшим примером такой функции является единичная функция Хевисайда:

$$y = \begin{cases} 1 \text{ при } x \geqslant 0; \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

График этой функции показан на рис. 6. Более сложные примеры таких функций будут рассмотрены ниже. Такого рода функции не являются элементарными, так как они заданы *не одной* формулой, а несколькими.

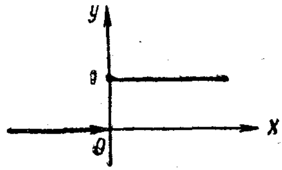


Рис. 6

Однако функция может быть задана и одной формулой, но не являться элементарной. Например, $y=[x]$ (целая часть x).

Эта функция определяется следующим образом: каждое число x можно записать в виде

$$x = y + \alpha,$$

где y — целое число;

α — неотрицательное число меньше единицы.

Каждому числу x соответствует единственное число y, которое является функцией от x.

§ 3. Предел функции и понятие о непрерывности функции

Понятия предела функции и непрерывности тесно связаны между собой.

Прежде чем дать определение этим понятиям, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $y = x^2$. При этом допустим, что x проходит ряд значений, приближающихся к числу 3. Если эти значения будут оставаться меньше трех, то мы считаем, что x приближается к трем *слева*. Если же значения будут больше трех, то x приближается к трем *справа*. Эти условия вполне естественны, так как они соответствуют расположению точек на числовой оси. Составим таблицу:

Таблица 2

x	2,96	2,97	2,98	2,99	3,00	3,01	3,02	3,03	3,04
$y=x^2$ (с точностью до 0,001)	8,762	8,821	8,880	8,940	9,00	9,060	9,120	9,181	9,242
$\lvert x^2-9 \rvert$ (с точностью до 0,001)	0,238	0,179	0,120	0,060	0,00	0,060	0,120	0,181	0,242

Из таблицы видно, что по мере приближения x к числу 3 значение y приближается к 9 (абсолютная величина разности $y-9$ уменьшается).

Заметим, что в данном примере безразлично, с какой стороны x приближается к числу 3 — слева или справа, y все равно приближается к 9.

Пусть задано какое-либо малое положительное число ε. Найдем условия, при которых y будет отличаться по абсолютной величине от числа 9 меньше чем на ε, т. е.

$$|y-9| < \varepsilon$$

или

$$|x^2-9| < \varepsilon,$$

что эквивалентно системе неравенств:

$$-\varepsilon < x^2-9 < \varepsilon$$

$$9-\varepsilon < x^2 < 9+\varepsilon$$

$$\sqrt{9-\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon}$$

(поведение функции $y=x^2$ рассматривается для этого случая вблизи точки $x=3$, а потому берутся только положительные значения x).

Итак, если x принадлежит к интервалу

$$\sqrt{9-\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon},$$

то неравенство

$$|x^2-9| < \varepsilon$$

выполняется.

Здесь ε — произвольное положительное число, которое может быть выбрано сколь угодно малым. Но каково бы оно ни было, всегда можно указать такой интервал, содержащий точку $x = 3$, в котором выполнялось бы неравенство

$$|x^2 - 9| < \varepsilon.$$

Например, возьмем $\varepsilon = 0{,}01$. По доказанному, неравенство $|x^2 - 9| < 0{,}01$ будет выполнено при $\sqrt{8{,}99} < x < \sqrt{9{,}01}$, т. е. при $2{,}998 < x < 3{,}002$.

Таким образом, если значение аргумента x брать достаточно близким к 3, то значения функции $y = x^2$ будут сколь угодно мало отличаться от 9. Число 9 поэтому является пределом функции $y = x^2$ при x, стремящемся к 3.

Пример 2. Пусть

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Рассмотрим табл. 3 значений этой функции вблизи точки $x = 2$.

Таблица 3

x	1,96	1,97	1,98	1,99	2,00	2,01	2,02	2,03	2,04
$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ (с точностью до 0,01)	3,96	3,97	3,98	3,99	Не определена	4,01	4,02	4,03	4,04
$\lvert y - 4 \rvert$ (с точностью до 0,01)	0,04	0,03	0,02	0,01	Не определена	0,01	0,02	0,03	0,04

В точке $x = 2$ заданная функция не определена (знаменатель обращается в нуль), но для всех значений x, отличных от двух,

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2;$$

при этом если значения x достаточно близки к 2 (но не равны 2), то соответствующие значения y сколь угодно близки к 4. Справедливость этого утверждения предоставляется проверить читателю (доказывается оно так же, как и в первом примере).

Итак, в первом примере в точке $x = 3$ функция была определена, а во втором — в точке $x = 2$ — не определена. Однако поведение обеих функций вблизи рассматриваемых точек совершенно аналогично. Поэтому и во втором примере число 4 можно назвать *пределом функции*

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

при x, стремящемся к 2.

Дадим теперь определение предела функции.

Определение 2. *Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такой интервал, содержащий точку $x = a$, что для любой точки этого интервала, за исключением быть может самой точки $x = a$, выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Если число b является пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a, то символически это записывается следующим образом:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to a.$$

Например:

$$\lim_{x \to 3} x^2 = 9$$

или

$$x^2 \to 9 \text{ при } x \to 3.$$

Заметим, что в обоих примерах (по смыслу определения предела) совершенно безразлично, с какой стороны приближается x к заданной точке — слева или справа. Более того, из определения предела следует, что если b является пределом для $f(x)$ при x, стремящемся к a, то значения x можно выбирать и слева и справа от точки a.

Однако это возможно не всегда. Поясним эту мысль на примере.

Пример 3. Пусть $y = \frac{|x|}{x}$.

Эта функция определена везде, за исключением точки $x = 0$, причем:

$$y = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 \text{ при } x > 0; \\ -\frac{x}{x} = -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим поведение этой функции вблизи точки $x = 0$ (рис. 7). Если приближать x к нулю слева, то y принимает только одно значение, равное -1, если же приближать x к нулю справа, то y принимает одно значение равное $+1$. В этом случае функция при x, стремящемся к нулю, предела не имеет. Можно выбрать такую последовательность значений x разных знаков, приближающихся к 0 не с одной стороны $\left(\text{например, } -\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, -\frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots\right)$, при которых y будет принимать значения то -1, то $+1$, не приближаясь ни к какому числу.

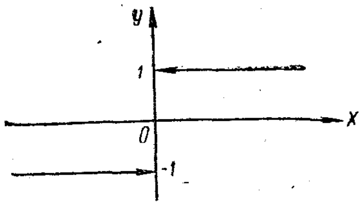


Рис. 7

Однако если приближать x к нулю слева (придавая ему только отрицательные значения), то y, принимая одно значение -1, будет иметь его и своим пределом. Отсюда возникает необходимость введения понятия односторонних пределов: *если x стремится к a слева, т. е. $x < a$, и при этом значения функции $f(x)$ стремятся к пределу, то этот предел называется левым, или пределом слева функции $f(x)$ в точке a.* Правый предел определяется аналогично.

Левый и правый пределы соответственно обозначаются:

$$f(a-0);\ f(a+0).$$

Значит

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a-0); \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a+0).$$

Если функция $f(x)$ имеет предел b при x, стремящемся к a, то очевидно, что она имеет при этом левый и правый пределы и оба они равны b (по определению предела; способ стремления x к числу a безразличен). Обратное утверждение, как показывает последний пример, неверно. Функция может иметь односторонние пределы $f(a-0)=-1$ и $f(0+a)=+1$, но не иметь единого предела в данной точке, если эти односторонние пределы неодинаковы.

Понятия односторонних пределов дают возможность рассмотреть вопрос о непрерывности функции в точке и в интервале.

Определение 3. *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке $x=a$, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки, односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$ существуют, равны между собой и равны значению функции в этой точке, т. е.*

$$f(a-0)=f(a+0)=f(a).$$

Заметим, что требование существования односторонних пределов и их равенства можно в этом определении заменить требованием существования просто предела $f(x)$ при x, стремящемся к a. Однако приведенное определение 3 в ряде случаев оказывается более удобным, например, для классификации точек разрыва функции (см. стр. 21).

В соответствии с определением 3 в первом из рассмотренных выше примеров функция $y=x^2$ в точке $x=3$ непрерывна, чего нельзя сказать про второй и третий примеры. В третьем примере левый и правый пределы существуют, но не равны друг другу во втором примере $f(2-0)=f(2+0)=4$, но в самой точке $x=2$ $f(x)$ не существует.

Определение 4. *Функция называется непрерывной в интервале, если она непрерывна в каждой его точке**.

Геометрически непрерывность функции $y=f(x)$ в интервале означает, что график ее представляет собой сплошную линию без разрывов (такую линию можно вычертить, не отрывая карандаша от бумаги).

Определение 5. *Точка $x=a$ называется точкой разрыва функции $f(x)$, если $f(x)$ не является в этой точке непрерывной.* (При этом предполагается, что $f(x)$ опре-

* Для замкнутого интервала в определении 4 следует сделать оговорку о том, что для левого конца интервала рассматривается только правый предел, а для правого конца только левый.

делена в некоторой окрестности точки a, **в самой же точке** функция может быть как определена, так и не определена.)

Таким образом, если рассматривать односторонние пределы заданной нам функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, то возможны следующие случаи:

1) $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$ — функция непрерывна в точке a (в соответствии с определением 3);

2) $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$, т. е. левый и правый пределы существуют, одинаковы, но не равны значению функции в самой точке $x = a$. В этом случае достаточно изменить значение функции в одной точке и разрыв будет устранен. Вот почему такая точка называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$. Точка $x = a$ является точкой устранимого разрыва и в случае, если $f(a-0) = f(a+0)$, а $f(a)$ не существует. Именно такого рода случай был рассмотрен в примере 2, где $f(2-0) = f(2+0) = 4$, а $f(x)$ в точке $x = 2$ не существовала. В этом случае достаточно доопределить функцию в одной точке, положив по определению:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при } x \neq 2; \\ 4, & \text{при } x = 2 \end{cases}$$

и разрыв будет устранен.

3) $f(a-0) \neq f(a+0)$, т. е. левый и правый пределы существуют, но не одинаковы, $f(x)$ разрывна в этой точке. Такая точка называется *точкой разрыва первого рода*. В примере 3 точка $x = 0$ является точкой разрыва первого рода.

Заметим, что при переходе через такую точку $(x = a)$ слева направо происходит конечный скачок, величину которого можно определить, вычитая из правого предела левый:

$$d = f(a+0) - f(a-0).$$

В примере 2

$$d = f(0+0) - f(0-0) = 1 - (-1) = 2;$$

4) хотя бы один из пределов $f(a+0)$ или $f(a-0)$ не существует; в этом случае точка $x = a$ называется *точкой разрыва второго рода*.

Простейшим примером точки разрыва второго рода может служить точка $x = 0$ для функции $y = \dfrac{1}{x}$. Графиком этой функции является гипербола (рис. 8). Пусть x стремится к нулю справа, тогда y будет возрастать. Причем какое бы большое число N мы не выбрали, взяв $x < \frac{1}{N}$, получим $y = \frac{1}{x} > N$. Следовательно, по мере приближения x к нулю справа y возрастает безгранично.

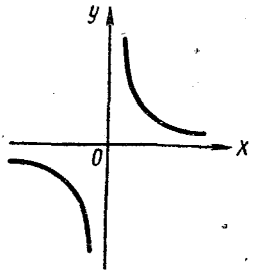


Рис. 8

Правый предел y при x, стремящемся к нулю, не существует. Символически этот факт записывают так:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Эта запись говорит о характере изменения функции $y = \frac{1}{x}$ при x, стремящемся к 0 справа, т. е. о безграничном возрастании y. Заметим, что такая запись приводит иногда к заблуждению, т. е. к мысли о существовании этого предела. Следует иметь в виду, что ∞ не число, а условный знак, выражающий факт безграничного (или беспредельного) возрастания.

В рассмотренном примере предел слева также не существует, причем при приближении x к нулю слева y по абсолютной величине возрастает безгранично, оставаясь все время отрицательным. Это символически записывается так:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Можно доказать, что любая *элементарная* функция непрерывна во всех точках, где она определена, а потому точки разрыва следует искать только там, где функция не определена.

Например, для функции $y = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$ точками разрыва могут быть только точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, в которых функция не определена. Далее будет показано, что эти точки действительно являются точками разрыва второго рода.

Ранее было дано определение предела функции при $x \to a$. Однако функция может иметь предел и при неограниченном возрастании (убывании) аргумента.

Определение 6. *Число b называется пределом функции при $x \to \infty$, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно указать такое положительное число N, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.*

Так, например, легко видеть, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$.

В дальнейшем поведение функции при неограниченном возрастании (убывании) аргумента будем называть поведением функции на бесконечных ветвях.

Вопросы для повторения

1. Что называется функцией?
2. Какие функции называют основными элементарными функциями?
3. Что называется элементарной функцией?
4. Приведите примеры неэлементарных функций.
5. Что называется пределом функции (при $x \to a$ и при $x \to \infty$)?
6. Дайте определение непрерывности функции в точке.
7. Укажите виды точек разрыва. Приведите примеры.

ГЛАВА II
ЭЛЕМЕНТЫ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ

Изучить заданную функцию — значит охарактеризовать ход ее изменения (ее «поведение») при изменении независимой переменной. При этом целесообразно рассматривать изменение независимой переменной от меньших значений к большим через все промежуточные значения.

Поведение функции характеризуется рядом элементов. К таким элементам относятся: область определения и точки разрыва функции, четность или нечетность, периодичность, нули функции, интервалы знакопостоянства, асимптоты, экстремумы и интервалы монотонности, точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости.

§ 1. Область определения и точки разрыва

Определение 7. *Областью определения функции $y = f(x)$ называется совокупность всех значений x*, для которых определяются значения функции y.

При табличном способе задания функции к области ее определения относятся все значения x, указанные в таблице, от первого до последнего. Для промежуточных значений x не указанных в таблице, функция может быть и не определена. Например, таблицей задана последовательность частичных сумм арифметической прогрессии: $x = n$, где n — число членов прогрессии может принимать только целые положительные значения; $y = f(x) = S_n$, где S_n — сумма первых n членов этой прогрессии. Приведенный пример показывает также, что любую числовую последовательность можно рассматривать как функцию целочисленного аргумента — номера члена последовательности.

Следует отметить, что при табличном способе задания функция может быть задана и для всех значений x, находящихся между двумя крайними числами в таблице, а не только для тех, которые в ней указаны. При этом должен быть указан способ определения y для любых промежуточных значений x (чаще всего таким способом является линейная интерполяция *). Это и дает возможность при практическом пользовании таблицами находить значения y для допустимого значения x из бесконечного множества возможных значений, хотя таблица содержит лишь конечное число строк (или столбцов).

При графическом способе задания область определения очевидна из графика, а при словесном — из определения данной функции.

При аналитическом способе задания функции (если нет каких-либо дополнительных условий) под областью определения понимают множество всех значений x, при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл. Такая область определения называется *естественной* (или областью существования). Дополнительные условия могут уменьшить естественную область определения функции. Например, функция $y = x^2$ определена при любом вещественном x (ее естественной областью определения будет вся числовая ось), но если по условиям задачи y является площадью квадрата со стороной x, то эту функцию следует рассматривать лишь при положительных значениях x (ее областью определения будет множество всех положительных чисел).

Областью определения функции может быть множество отдельных значений x, «изолированных» друг от друга, как в указанном выше примере с последовательностью. Рассмотрим еще один пример.

Найти область определения функции

$$y = 1 + \sqrt{\lg \cos x}.$$

Чтобы эта формула имела смысл, подкоренное выражение должно существовать и быть неотрицательным, что возможно лишь при $x = 2\pi k$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. При этих значениях x функция $\cos x = 1$, $\lg \cos x = 0$, $y = 1$ (при всех других значениях x $\cos x$ либо не положителен, но тогда $\lg \cos x$ не существует, либо положителен, но меньше 1, но тогда $\lg \cos x$ будет отрицательным, а потому корень из него не существует). Графиком данной функции (рис. 9) является множество отдельных точек, расположенных на прямой $y = 1$.

---

* Подробно о линейной интерполяции см.: «Элементы вычислительной математики». Под ред. С. Б. Норкина. «Высшая школа», 1960.

Можно привести пример функции, областью определения которой является только одна точка $x = a$

$$y = \sqrt{-(x-a)^2};$$

очевидно, y будет вещественным только при $x = a (y=0)$.

Однако допустимые значения x чаще заполняют один или несколько участков (интервалов) на числовой оси (конечных или бесконечных).

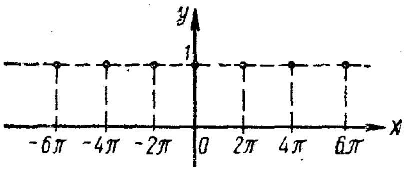


Рис. 9

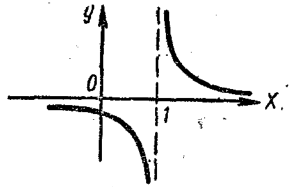


Рис. 10

Определение 8. *Интервалом называется множество всех чисел (точек числовой оси), заключенных между какими-либо двумя числами (точками числовой оси). Ограничивающие интервал числа (точки) называют концами интервала.*

Интервал с концами a и b $(a < b)$ можно задать неравенствами $a<x<b$ или $a \leqslant x \leqslant b$. В первом случае концы не принадлежат интервалу, и он называется *открытым*, или *незамкнутым*, и обозначается (a, b). Во втором случае концы принадлежат интервалу; такой интервал называется *замкнутым* и обозначается $[a, b]$. Возможны и такие случаи, когда один конец принадлежит интервалу, а второй нет, тогда интервал называется *полуоткрытым (полузамкнутым)*. Такой интервал задается неравенствами $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$ и может быть обозначен $[a, b)$ или $(a, b]$. Интервал может быть и бесконечным, но тогда он не может быть замкнутым.

Для нахождения естественной области определения функции надо знать, что ограничивает область существования функции. Рассмотрим эти ограничения.

1. Обращение в нуль знаменателя. Например, функция $y = \frac{1}{x-1}$ (рис. 10) существует при любых значениях

x, кроме $x = 1$ (при этом значении x знаменатель обращается в 0, и выражение теряет смысл). Поэтому областью определения данной функции является совокупность двух открытых бесконечных интервалов $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$.

2. Извлечение корня четной степени имеет смысл только при неотрицательных значениях подкоренного выражения (так как y должен быть вещественным).

Например:

$$y = \sqrt{x^2 - 5x + 6} = \sqrt{(x-3)(x-2)}.$$

Эта функция определена при $x \geqslant 3$ и при $x \leqslant 2$, т. е. при тех значениях x, при которых подкоренное выражение неотрицательно. Область определения — совокупность двух полуоткрытых бесконечных интервалов: $(-\infty, 2]$ и $[3, +\infty)$.

3. Выражения, содержащие $\log_a x$, имеют смысл только при положительных x. Областью определения функции $y = \log_a x$ является открытый бесконечный интервал $(0, +\infty)$.

4. Выражения, содержащие $\arcsin x$ или $\arccos x$, имеют смысл только при $|x| \leqslant 1$. Областью определения функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ является замкнутый интервал $[-1, +1]$, так как синус угла и косинус угла по абсолютной величине не могут быть больше 1.

Если в одной формуле имеются разные выражения, то областью определения является множество таких значений x, при которых все эти выражения имеют смысл.

Пример 1. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12} + \lg(x-1)}{x^2 - 4}.$$

Решение. Выражение $\sqrt{x^2 - 7x + 12}$ имеет смысл в интервалах: $(-\infty, +3]$, $[4, +\infty)$ (из условия $x^2 - 7x + 12 \geqslant 0$).

Выражение $\lg(x-1)$ имеет смысл в интервале $(1, +\infty)$ (из условия $x - 1 > 0$).

Выражение $\frac{1}{x^2-4}$ имеет смысл в интервалах: $(-\infty, -2)$, $(-2, +2)$, $(2, +\infty)$ (из условия $x \neq \pm 2$).

Поэтому естественной областью определения заданной функции является совокупность трех интервалов: $(1, 2)$, $(2, 3]$, $[4, +\infty)$ (так как при любом значении x из этих интервалов все выражения, входящие в рассматриваемую формулу, имеют смысл).

Удобнее всего находить область определения функции графическим способом, отмечая на числовой оси области определения отдельных выражений, входящих

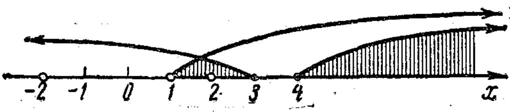


Рис. 11

в заданную формулу, а затем выделяя интервалы, где все они определены. Для рассмотренного примера такие построения показаны на рис. 11 (область определения заданной функции заштрихована). Концы интервалов отмечены сплошным кружком — если входят в область определения — и окружностью — если не входят.

Упражнения. Найти области определения функций, заданных аналитически:

1. $y = \sin x + \cos x$. 2. $y = 2^{x^2-3x+5}$. 3. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

4. $y = \dfrac{1}{1-\sqrt{x^2}}$. 5. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

6. $y = \dfrac{1}{\log_2(x-1)}$. 7. $y = \arcsin\sqrt{x}$.

8. $y = \dfrac{\log_2 x}{\arcsin(x-3)}$. 9. $y = \dfrac{\sqrt{\log_2 \sin x}}{\sqrt{x^2-3x+2}}$.

10. $y = x^{1+\sqrt{1-|\operatorname{cosec} x|}}$. 11. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x-3}}$.

12. $y = \log_2(x^2-4x+5)$. 13. $y = \log_3\dfrac{x(x-4)}{3x-4}$.

14. $y = 5\sqrt{x-2} + \dfrac{1}{\sqrt{5-x}}$. 15. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{x}$.

16. $y = 2^{\log_2 x}$.

§ 2. Четность и нечетность

Определение 9. *Функция $f(x)$ называется четной, если при всех значениях аргумента из области определения этой функции при изменении знака аргумента значение функции не изменяется, т. е.*

$$f(-x)=f(x).$$

Обратим внимание на то, что при этом значение функции не меняется ни по абсолютной величине, ни по знаку.

Таковы, например, функции:

$$y=x^2;\ y=\cos x;\ y=|x|;\ y=f(|x|).$$

Определение 10. *Функция $y=f(x)$ называется нечетной, если при всех значениях аргумента из области определения этой функции при изменении знака аргумента функция меняет знак, но не меняет своей абсолютной величины, т. е.*

$$f(-x)=-f(x).$$

Примеры нечетных функций:

$$y=x^3;\ y=\sin x;\ y=x|x|.$$

Из определения четной функции следует, что график ее симметричен относительно оси Oy (рис. 12, *а*), из определения нечетной функции следует, что ее график симметричен относительно начала координат (рис. 12, *б*).

Выявление четности или нечетности функции облегчает построение графика, уменьшая область необходимых исследований: можно исследовать поведение функции и построить ее график только при $x \geqslant 0$, а при $x<0$ — воспользоваться указанной выше симметричностью. Заметим, что по смыслу определений 9 и 10 область определения четной (или нечетной) функции должна быть симметричной относительно начала координат.

Поэтому если область определения оказалась несимметричной, то четности или нечетности вообще не может быть. Условие симметричности области определения является *необходимым* условием для того, чтобы функция могла быть четной или нечетной. Однако это условие не является *достаточным*: например, области определения функции $y=x+1$, $y=2^x$ симметричные (вся числовая ось), но эти функции не являются ни четными, ни нечетными.

Для того чтобы решить, является ли заданная функция четной или нечетной, надо руководствоваться определениями 9 и 10. Следует установить, что произойдет с функцией, если при произвольном значении x из области определения функции изменить его знак. Например, дана функция $y=x\sin x$, которая определена на

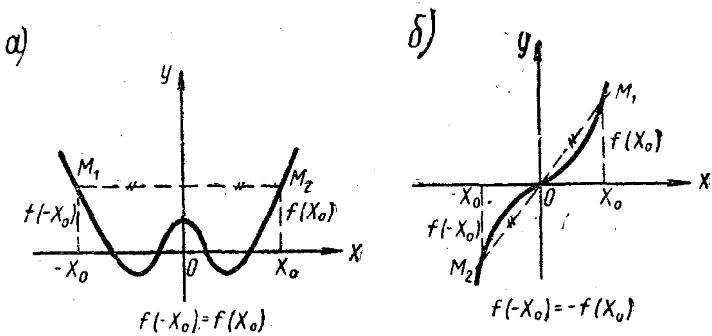


Рис. 12

всей числовой оси. При произвольном значении аргумента изменим его знак, получим $(-x)\sin(-x)=$ $=x\sin x$, т. е. $f(-x)=f(x)$, и, следовательно, заданная функция является четной.

Аналогично, можно убедиться в том, что функция $y=\frac{x^3}{x^2-1}$ является нечетной, так как при любом допустимом x выполнено условие $f(-x)=-f(x)$. Следует обратить внимание на то, что в первом из этих примеров данная функция является произведением двух нечетных функций, а во втором — произведением нечетной и четной функций. Можно доказать, что вообще *произведение двух нечетных функций является четной функцией, а произведение четной и нечетной функций является функцией нечетной* (в общей части их областей определения). Доказательство этого утверждения непосредственно вытекает из определений 9 и 10 и предоставляется провести читателю.

Рассмотрим связь между любой функцией, определенной на всей числовой оси, с четными и нечетными функциями.

Теорема. *Любая функция $y=f(x)$, областью определения которой является вся числовая ось, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций, имеющих ту же область определения, что и $f(x)$.*

Доказательство. Пусть $y=f(x)$ — произвольная функция, определенная на всей числовой оси. Рассмотрим две функции:

$$y_1 = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \text{ и } y_2 = \frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

Непосредственно из определений 9 и 10 следует, что y_1 — четная функция, а y_2 — нечетная. В самом деле:

$$y_1(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = y_1(x);$$

$$y_2(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -y_2(x).$$

Но их сумма равна $f(x)$:

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = f(x),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида. К ним относятся:

$$y = x^3 - 1,\ y = 2^x,\ y = \log_2 x \text{ и др.}$$

Упражнения. Определить, какие из заданных функций являются четными, нечетными, общего вида:

$$y = x - x^2;\ y = x^2 \sin x;\ y = x^2 \cos x;\ y = \frac{|x|}{x};$$

$$y = \log_2(x^2 - 1);$$

$$y = \frac{x-1}{x^2+1};\ y = \frac{x^2-1}{x^2+1};\ y = \frac{x^3}{x^2-4};\ y = 2^{\cos x};\ y = 2^x - 2^{-x}$$

§ 3. Периодичность

Определение 11. *Функция $y=f(x)$ называется периодической, если существует такое число $a \neq 0$, что от при-*

бавления его к любому значению аргумента из области определения этой функции значение функции не изменяется: $f(x+a)=f(x)$.

Число a в этом случае называется *периодом* функции. Периодическими являются, например, тригонометрические функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ и др.

Примером периодической нетригонометрической функции может служить функция $y=\{x\}=x-[x]$, где каждому числу x ставится в соответствие его дробная часть. Например, $\{2{,}05\}=0{,}05$; $\{3{,}05\}=0{,}05$; $\{4{,}52\}=0{,}52$; но $\{-2{,}05\}=0{,}95$; так как целая часть числа 2,05 равна —3, а не —2, ведь, по определению, целая часть числа x не должна превышать x.

Если к произвольному числу x прибавить 1, то дробная часть числа останется без изменений, т. е. $\{x+1\}=\{x\}$, и, следовательно, функция $y=\{x\}$ является периодической с периодом 1.

Заметим, что всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. В самом деле, если a является периодом функции $f(x)$, то

$$f(x+2a)=f[(x+a)+a]=f(x+a)=f(x);$$

$$f(x+3a)=f[(x+2a)+a]=f(x+2a)=f(x);\ \ldots;$$

аналогично этому

$$f(x-a)=f[(x-a)+a]=f(x);$$

$$f(x-2a)=f[(x-2a)+2a]=f(x),\ \ldots,$$

а это означает, что периодами функции $f(x)$ являются также и числа: $2a$, $3a$, ..., $-a$, $-2a$, ..., т. е. все числа вида na при любом целом n.

Говоря о периоде функции $f(x)$, обычно имеют в виду наименьший положительный период (для функции $y=\sin x$ период равен 2π, для $y=\operatorname{ctg} x$ — π и т. д.).

Следует, однако, иметь в виду, что наименьшего положительного периода у периодической функции может и не быть. Например, для функции $f(x)=5$ любое вещественное число является периодом, а наименьшего положительного среди вещественных чисел нет. Для функции Дирихле, о которой говорилось во введении, любое рациональное число является периодом, так как сумма двух рациональных чисел всегда рациональна, а сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна. Наименьшего числа среди положительных рациональных чисел нет.

Решая вопрос о периодичности заданной функции и о нахождении ее периода, следует исходить из определения 11. Пусть, например, дана функция $y=\sin 2x$.

Существует ли такое численное значение $a \neq 0$, чтобы для всех вещественных x (область определения заданной функции — вся числовая ось) выполнялось условие $\sin 2(x+a)=\sin 2x$? Отсюда $\sin 2(x+a)-\sin 2x=0$; $2\cos(2x+a)\sin a=0$, что может выполняться тождественно только при $\sin a=0$, $a=\pi k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, 1$).

Следовательно, такие значения существуют, функция является периодической, а наименьшим положительным периодом является π.

Исходя из определения 11, легко доказать, что сумма и произведение двух функций с одним и тем же периодом a являются функциями периодическими с периодом a. Доказательство этого утверждения предоставляется провести читателю. Заметим только, что если число a было наименьшим положительным периодом двух заданных функций, то после их сложения или умножения оно может перестать быть наименьшим из положительных периодов. Например, функции $f_1(x)=\sin x+1$ и $f_2(x)=1-\sin x$ имеют наименьший период, равный 2π, а их сумма $f_1(x)+f_2(x)=2$ наименьшего периода вообще не имеет. Для произведения $f_1(x)f_2(x)=\cos^2 x$ наименьшим положительным периодом будет уже не 2π, а π, в чем легко убедиться, представив это произведение в виде

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Выявление периодичности функции существенно облегчает ее изучение и построение графика: ее можно исследовать в пределах одного периода.

Упражнения. Выделить периодические функции и определить их наименьший период:

$$y=2\sin x; \quad y=\sin 2x; \quad y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right);$$

$$y=3\sin x+4\cos x; \quad y=\cos x+2\cos^2 x+3\cos 3x;$$

$$y=\sin^2 x; \quad y=\sin x^2; \quad y=\operatorname{tg}\sqrt{x}; \quad y=\sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$y=\sin x\cos x; \quad y=|\sin^3 x|; \quad y=\left|\sin x+\frac{1}{2}\right|.$$

§ 4. Нули функции

Определение 12. *Нулем функции называется то действительное значение* x, при котором значение функции равно нулю.

Графически нули функции представляют собой абсциссы точек, в которых график этой функции пересекает ось Ox или касается ее (рис. 13). В этих точках функция

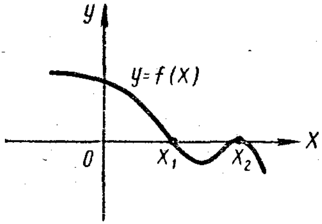


Рис. 13

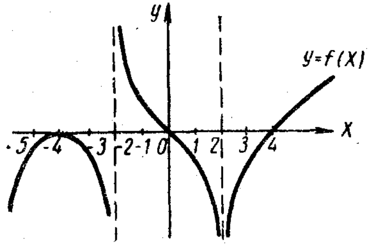


Рис. 14

может менять знак. Из рис. 13 видно, что функция до точки x_1 была положительной, после этой точки стала отрицательной. Заметим, что в нулевой точке функция может менять знак, но может и не менять его: точка $x=x_2$ — нуль функции $y=f(x)$, однако функция в этой точке знака не меняет.

Следует обратить внимание на связь между нулями функции $y=f(x)$ и решением уравнения $f(x)=0$. Очевидно, что вещественные корни этого уравнения являются нулями функции $y=f(x)$, и наоборот (на этом факте основаны все приближенные методы решения различных типов уравнений).

Упражнения. Найти нули следующих функций:

$$y=x^2-1;\ y=\frac{x^2-5x+6}{x-2};\ y=2^{3x-1};$$

$$y=\log_2\frac{2x-1}{x+2};\ y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+9);\ y=\sin^2 x;$$

$$y=\sin x+\frac{1}{\sin x};\ \ y=\sin x-\frac{1}{\sin x};\ y=2\cos^2 x+\cos x.$$

§ 5. Интервалы знакопостоянства

В предыдущем параграфе было указано, что функция может изменить свой знак в нуле. Кроме того, из примера $y=\frac{1}{x}$ (см. гл. I, § 3) очевидно, что функция может менять знак и при переходе через точку разрыва (пока $x<0$ и $y<0$; $x>0$ и $y>0$).

Таким образом, функция может менять знак только в нулевых точках или в точках разрыва. Если же на каком-то интервале функция не имеет ни нулей, ни точек разрыва, то знак на этом интервале не меняется. Такие интервалы называются *интервалами знакопостоянства*. Чтобы определить знак функции для всех точек такого интервала, достаточно определить его в любой точке этого интервала. В примере, изображенном на рис. 14, функция $y=f(x)$ имеет три нулевых точки: $x_1=-4$; $x_2=0$; $x_3=4$ и две точки разрыва: $x_4=-2$ и $x_5=2$. Знак функции меняется не во всех этих точках: в нулевой точке $x_1=-4$ и в точке разрыва $x_5=2$ знаки не меняются.

Упражнения. Определить интервалы знакопостоянства следующих функций:

$$y=3x-6; \qquad y=\frac{12}{x-1};$$

$$y=x^2-4x+3; \qquad y=\frac{3x+5}{x-2}.$$

$$y=x^2-6x+9; \qquad y=\frac{x-2}{x^2-4x+3};$$

$$y=x-x^2; \qquad y=\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x-6};$$

$$y=x-1-x^2; \qquad y=\sin 2x;$$

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(x-1); \qquad y=\arcsos 2x.$$

$$y=\log_{\frac{1}{2}}(-x);$$

§ 6. Асимптоты

При исследовании поведения функции на бесконечных ветвях (т. е. при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$) и вблизи точек разрыва часто оказывается, что график функции сколь угодно близко приближается к той или иной прямой. Такие прямые называют *асимптотами*.

Определение 13. Прямая линия l называется асимптотой кривой L, если расстояние δ от точки M кривой L до прямой l стремится к нулю при неограниченном продвижении точек M вдоль кривой.

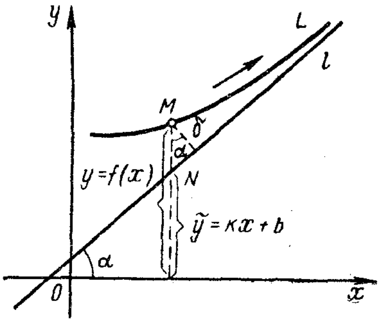


Рис. 15

В этом случае говорят, что кривая L асимптотически приближается к прямой l. Один из возможных случаев асимптотического приближения кривой к некоторой прямой показан на рис. 15.

Различают асимптоты вертикальные, горизонтальные и наклонные.

1. Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты ясно, что если график функции $y=f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x=a$, то при $x \to a$ хотя бы с одной из сторон — слева или справа — $y \to \infty$ $(y \to -\infty)$. Очевидно и обратное, если при $x \to a$ хотя бы с одной из сторон $y \to \infty$ $(y \to -\infty)$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой.

Например, график функции $y=\dfrac{2}{x-3}$ (рис. 16) имеет вертикальную асимптоту $x=3$, так как при $x \to 3-0$, $y \to -\infty$ и при $x \to 3+0$, $y \to +\infty$.

График функции $y=\operatorname{tg} x$ имеет бесчисленное множество вертикальных асимптот $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$ $(n=0;\ \pm 1;$ $\pm 2;\ \ldots)$, так как при $x \to \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $y \to \infty$.

Заметим еще, что если прямая $x=a$ — вертикальная асимптота, то хотя бы один из односторонних пределов

$f(a-0)$ или $f(a+0)$ не существует, а потому точка $x=a$ является для $f(x)$ точкой разрыва второго рода.

Таким образом, вертикальные асимптоты могут быть только в точках разрыва второго рода исследуемой функции.

Однако не всякой точке разрыва второго рода соответствует вертикальная асимптота. Например, функция $y=\sin\frac{1}{x}$ имеет точку разрыва второго рода $x=0$ (ни один из односторонних пределов не существует), а вертикальной асимптоты график этой функции не имеет, так как эта функция ограничена $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant 1$ и y вообще не может стремиться к бесконечности.

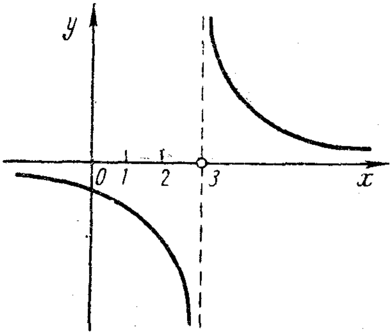


Рис. 16

2. Горизонтальные асимптоты

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$, то прямая $y=b$ является горизонтальной асимптотой для соответствующей части графика функции $f(x)$. Например, график рассмотренной выше функции $y=\dfrac{2}{x-3}$ (рис. 16) имеет, очевидно, горизонтальную асимптоту $y=0$, причем эта прямая является асимптотой для обоих ветвей графика, так как $y\to 0$ как при $x\to+\infty$, так и при $x\to-\infty$.

3. Наклонные асимптоты

Пусть прямая $y=kx+b$ является асимптотой для правой ветви графика функции $f(x)$ (рис. 15). Это означает, что $\delta\to 0$ при $x\to+\infty$. Но $\delta=MN\cdot\cos\alpha$, а потому если $\lim\limits_{x\to+\infty}\delta=0$, то и $\lim\limits_{x\to+\infty} MN=0$ и наоборот ($\cos\alpha$ — постоянное число).

Но

$$MN=|y-\tilde{y}|=|f(x)-(kx+b)|. \tag{1}$$

Отсюда, если прямая $\tilde{y}=kx+b$ является асимптотой для правой ветви графика, то

$$\lim_{x\to+\infty} |f(x)-(kx+b)|=0. \tag{2}$$

Вынося x за скобки, получим

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Но это возможно (так как $x\to+\infty$) только, если

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

При постоянном b $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{b}{x}=0$, следовательно

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k\right]=0.$$

Откуда

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}. \tag{3}$$

Зная k, из равенства (2) находим

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]. \tag{4}$$

Итак, если прямая $\tilde{y}=kx+b$ есть асимптота, то k и b находятся по формулам (3) и (4). Обратно, если существуют пределы (3) и (4), то выполняется равенство (2) и прямая $\tilde{y}=kx+b$ — есть асимптота.

Если же хотя бы один из пределов (3) и (4) не существует, то правая ветвь графика $f(x)$ наклонных асимптот не имеет.

Заметим, что мы проводили исследование применительно к рис. 15, т. е. при $x\to+\infty$, то все рассуждения справедливы и для случая $x\to-\infty$. Вполне возможно, что одна из ветвей графика имеет наклонную асимптоту, а другая — нет, или каждая из ветвей имеет свою наклонную асимптоту. Поэтому при отыскании наклонных асимптот следует отдельно рассматривать два случая: $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Практически целесообразно искать асимптоты в следующем порядке:

1) вертикальные асимптоты;

2) горизонтальные асимптоты;

3) наклонные асимптоты.

При этом, если при отыскании наклонных асимптот окажется $k=0$, то это означает, что наклонных асимптот график не имеет, а вопрос о наличии горизонтальных асимптот уже выяснен.

Пример 1. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x}.$$

1. Находим вертикальные асимптоты. Точка разрыва второго рода $x=0$. При $x \to 0-0$, $y \to +\infty$; при $x \to 0+0$, $y \to -\infty$. Следовательно, ось ординат $x=0$ — есть вертикальная асимптота.

2. Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \left(x + 2 - \frac{3}{x}\right) = \pm\infty,$$

следовательно, горизонтальных асимптот кривая не имеет.

3. Находим наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 3}{x} - x\right] =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x - 3}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(2 - \frac{3}{x}\right) = 2.$$

Следовательно, прямая $\tilde{y} = x + 2$ является наклонной асимптотой для обоих ветвей графика заданной функции (оказалось, что k и b в данном примере не зависят от того, стремится ли x к $+\infty$ или к $-\infty$).

График заданной функции схематически показан на рис. 17.

Пример 2. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^2}{|x| - 1}$.

Заметим прежде всего, что заданная функция является четной, а потому ее график симметричен относительно оси ординат. При $x \geqslant 0$, $y = \dfrac{x^2}{x - 1}$. Следовательно правая часть графика имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

$$\lim_{x \to \infty} y = \infty,$$

т. е. горизонтальных асимптот график не имеет.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = 1.$$

Следовательно, прямая $\tilde{y} = x + 1$ является наклонной асимптотой для правой части графика.

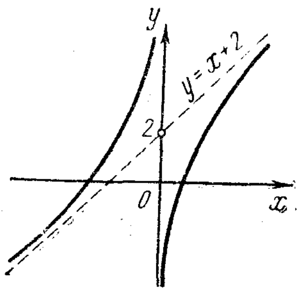


Рис. 17

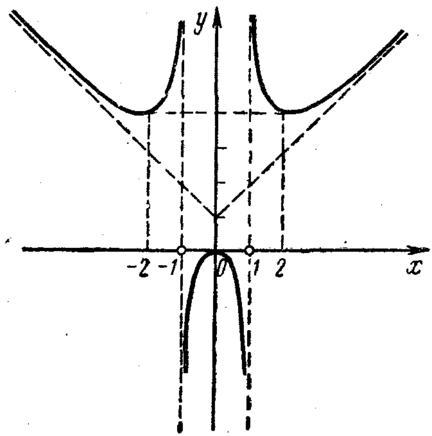


Рис. 18

В силу симметрии графика относительно оси ординат левая его часть имеет вертикальную асимптоту $x = -1$ и наклонную $\tilde{y} = -x + 1$.

График данной функции показан на рис. 18. Этот пример показывает, что правая и левая ветви графика могут иметь разные наклонные асимптоты.

В заключение отметим, что исследование элементов поведения функций, рассмотренных в § 1—6, не требует применения производных. При этом во многих случаях, как будет показано далее, исследование рассмотренных шести элементов дает возможность достаточно точно построить график исследуемой функции. Для более глубокого исследования и более точного построения графика заданной функции необходимо рассмотрение еще некоторых элементов поведения функций. Без применения производной это сделать весьма затруднительно.

В параграфах 7 и 8 рассматривается ряд элементов поведения функций с применением производных. При этом, исходя из цели настоящей работы, подробно рассматривается геометрический смысл и методика исследования функции, а доказательства довольно большого числа теорем опускаются. Определение производной и необходимые доказательства читатель без труда найдет в любом курсе математического анализа.

Упражнения. Найти асимптоты следующих кривых:

$$y = \frac{x-2}{2x+1};\; y = \frac{2x^2}{x-1};\; y = \frac{x^2-4}{x^2-1};$$

$$y = \frac{x^2}{2x+1};\; y = \frac{x^3}{1-x^2}.$$

§ 7. Экстремумы и интервалы монотонности

Определение 14. *Функция называется возрастающей в интервале, если большим значениям аргумента в этом интервале соответствуют большие значения функции; она*

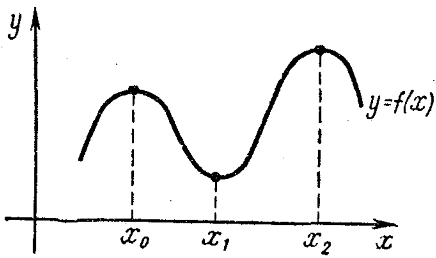


Рис. 19

называется убывающей в интервале, если большим значениям аргумента в этом интервале соответствуют меньшие значения функции. Интервалы возрастания и убывания функции называются интервалами монотонности, а функция в таком интервале — монотонной.

Например, функция $y=f(x)$ график которой показан на рис. 19, на интервале (x_0, x_1) убывает, а на интервале (x_1, x_2) — возрастает. Указанные интервалы являются интервалами ее монотонности.

Границами этих интервалов являются точки, в которых меняется характер поведения функции: возрастание сменяется убыванием (точки x_0 и x_2) или наоборот — убывание сменяется возрастанием (точка x_1). В первом случае значение функции в такой точке $f(x_0)$ будет наибольшим среди всех ее значений в некоторой окрестности точки x_0, во втором — наименьшим.

Определение 15. *Точка x_0 называется точкой максимума* (max) *функции $f(x)$, если ее значение в этой точке $f(x_0)$ есть наибольшее значение функции $f(x)$* в некоторой окрестности точки x_0.

Точка x_0 называется точкой минимума (min) *функции $f(x)$, если $f(x_0)$ есть наименьшее значение $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0.*

Точки максимума и минимума называются экстремальными точками, а значения функции в этих точках — экстремумами.

Заметим, что функция может иметь на данном интервале несколько максимумов и несколько минимумов, носящих относительный характер. Но в каждой такой точке меняется характер поведения функции: возрастание сменяется убыванием или наоборот.

Таким образом, нахождение экстремальных точек дает возможность не только найти максимумы и минимумы функции, но и установить границы интервалов монотонности.

Из геометрического смысла производной ($f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$ — есть угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке x) ясно, что если $f'(x)>0$ в любой точке какого-нибудь интервала, то $f(x)$ в этом интервале только возрастает (касательная в любой точке образует острый угол с положительным направлением оси абсцисс); если $f'(x)<0$ в любой точке интервала, то $f(x)$ в этом интервале убывает (касательная в любой точке образует тупой угол с положительным направлением оси абсцисс), и, наконец, если $f'(x)=0$ в интервале, то $f(x) = \mathrm{const}$ в этом интервале. В этом заключается *достаточный признак монотонности функции в интервале.*

Таким образом, интервалы знакопостоянства производной $f'(x)$ являются интервалами монотонности функции $f(x)$, а нахождение интервалов монотонности функции $f(x)$ сводится к нахождению интервалов знакопостоянства ее производной $f'(x)$ (существование $f'(x)$ предполагается).

В § 4 настоящей главы отмечалось, что любая функция может менять знак только в нулях или в точках разрыва. Отсюда следует, что экстремумы могут быть только в тех точках, в которых производная равна нулю или не существует — *необходимый признак экстремума*. Эти точки называются *критическими*.

На рис. 20 точки x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 являются критическими.

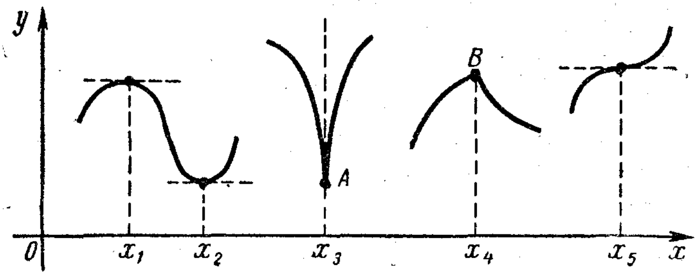


Рис. 20

В точках x_1, x_2 и x_5 производная равна нулю (касательные к кривым в этих точках горизонтальны). А в точках x_3, x_4 — производные не существуют (точка A *называется точкой возврата*: касательная в этой точке вертикальна, а точка B называется *угловой точкой*: касательной в этой точке кривая не имеет). Обратим внимание на то, что точка x_5 является критической, а экстремума в ней нет. Это говорит о том, что указанный выше необходимый признак экстремума не является достаточным.

Достаточным является следующий признак: точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, непрерывной в точке x_0, если производная $f'(x)$ при переходе через эту точку меняет знак; причем при перемене знака производной с «+» на «—» точка x_0 является точкой max, а при перемене знака с «—» на «+» — точкой min.

После всего сказанного геометрический смысл этого признака совершенно ясен: если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, например, с «+» на «—», то это означает, что до точки x_0 $f(x)$ возрастает, а после точки

x_0 — убывает, т. е. в точке x_0 возрастание сменяется убыванием, отсюда следует, что точка x_0 является точкой максимума.

Отыскание экстремумов и интервалов монотонности дифференцируемой функции $y=f(x)$ целесообразно производить в следующей последовательности:

1. Найти первую производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки, т. е. точки, в которых $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует.
3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой из критических точек и, применив достаточный признак экстремума, решить, является ли каждая из этих точек экстремальной или нет. Если экстремум в такой точке существует, то посмотреть, является ли эта точка точкой max или точкой min.
4. Вычислить значения функции в экстремальных точках.
5. Указать интервалы монотонности — интервалы между соседними точками экстремумов.

Пример 1. Исследовать на экстремумы и найти интервалы монотонности функции $y=ax^2+bx+c$ в случае, если $a>0$.

Находим производную:

$$y' = 2ax + b.$$

Эта производная существует на всей числовой оси, а поэтому критическую точку находим, решая уравнение

$$2ax + b = 0.$$

Легко видеть, что при $x<-\frac{b}{2a}$, $y'<0$, а при $x>-\frac{b}{2a}$, $y'>0$. Следовательно до этой точки функция убывает, а после нее — возрастает и в самой этой точке функция имеет минимум. Легко подсчитать, что

$$y_{\min} = y\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

График квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ схематически показанный на рис. 21, известен из курса средней школы. С помощью производной мы лишний раз убедились в том, что минимальное значение эта функция принимает при $x=-\frac{b}{2a}$, т. е. в вершине параболы.

Интервалы монотонности очевидны: $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ и

$\left(-\frac{b}{2a}, \infty\right)$. В первом из них $y'<0$ — функция убывает, во втором — $y'>0$ и функция возрастает.

Пример 2. Исследовать на экстремумы и найти интервалы монотонности функции

$$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{5}{3}.$$

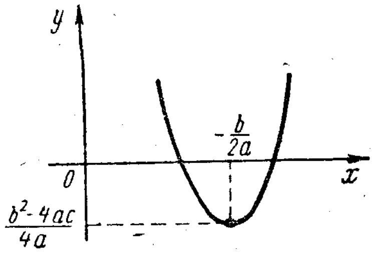


Рис. 21

Находим производную:

$$y' = x^2 - 4x + 3$$

Решая уравнение $x^2-4x+3=0$, находим две критические точки: $x_1=1$ и $x_2=3$. Других критических точек нет, так как y' существует на всей числовой оси. Дальнейшее исследование удобно вести, заполнив табл. 4.

Таблица 4

x	0	$\boxed{1}$	2	$\boxed{3}$	4
y'	+	0	−	0	+
y	↗	max	↘	min	↗

В эту таблицу прежде всего заносим критические точки так, чтобы можно было занести результаты исследований слева и справа от каждой из них. Для определения знака y' в любом из интервалов определяем знак y' в произвольной точке данного интервала (менять знак y' может только в критических точках), а возрастание или убывание функции, определяемое по знаку y' отмечаем стрелкой. После чего становится совершенно ясным, что точка $x=1$ является точкой максимума, а точка $x=3$ — точкой минимума. Из таблицы ясны и интервалы монотонности: $(-\infty, 1)$; $(1, 3)$ и $(3, \infty)$ причем в первом и третьем из них функция возрастает, а во втором — убывает.

Остается найти $y_{\max}$ и $y_{\min}$:

$$y_{\max} = y(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + \frac{5}{3} = 3;$$

$$y_{\min} = y(3) = 1 - 14 + 9 + \frac{5}{3} = \frac{5}{3}.$$

График данной функции схематически показан на рис. 22.

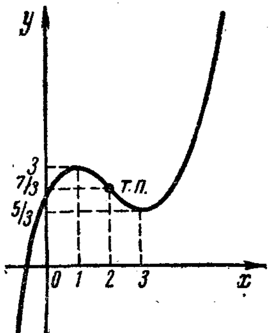


Рис. 22

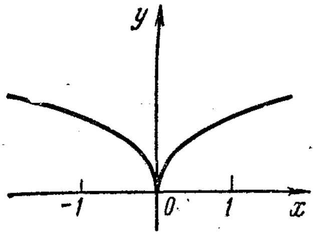


Рис. 23

Пример 3. Исследовать на экстремумы и найти интервалы монотонности функции

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Находим производную:

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Очевидно, что $y' \neq 0$ при любом x. Однако критическая точка имеется: $x=0$. В этой точке заданная функция непрерывна, а ее производная не существует.

При $x<0$, $y'<0$ — функция убывает, а при $x>0$ $y'>0$ — функция возрастает. Следовательно точка $x=0$ является точкой минимума: $y_{\min}=y(0)=0$.

Интервалы монотонности: $(-\infty, 0)$ — интервал убывания и $(0, \infty)$ — интервал возрастания.

Обратим внимание на то, что при $x \to 0$, $y' \to \infty$, а это означает, что в данной точке кривая имеет вертикальную касательную, такую точку называют точкой возврата.

График заданной функции схематически показан на рис. 23.

§ 8. Точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графика функции

Важной характеристикой формы кривой является направление ее выпуклости.

Определение 16. *Говорят, что кривая на интервале (a, b) обращена выпуклостью вверх, если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале и — выпуклостью вниз, если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.*

Кривую, обращенную выпуклостью вверх, будем называть выпуклой, а обращенную выпуклостью вниз — вогнутой.

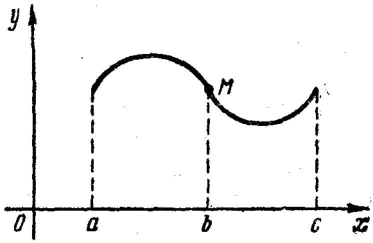


Рис. 24

На рис. 24 показана кривая, выпуклая на интервале (a, b) и вогнутая на интервале (b, c).

Указанные интервалы являются интервалами выпуклости и вогнутости данной линии. Точка M на заданной линии отделяет выпуклую дугу от вогнутой. Такие точки называются *точками перегиба*. Ясно, что отыскание точек перегиба графика при исследовании функции весьма существенно: эти точки являются граничными для интервалов выпуклости и вогнутости графика.

Известно, что если вторая производная $f''(x)>0$ в интервале (a, b), то дуга линии $y=f(x)$ в этом интервале вогнутая, а при $f''(x)<0$ — выпуклая. В этом заключается *достаточный признак выпуклости и вогнутости кривой $y=f(x)$ в интервале.*

Таким образом, интервалы знакопостоянства второй производной $f''(x)$ являются интервалами выпуклости и вогнутости графика функции $y=f(x)$ (существование $f''(x)$ предполагается). Отыскание интервалов выпуклости и вогнутости линии $y=f(x)$ сводится поэтому к отысканию интервалов знакопостоянства второй производной. А менять знак $f''(x)$, как и любая функция, может только в нулях или в точках разрыва. Отсюда следует, что точки перегиба могут быть только в тех точках, где вторая производная равна нулю или не существует — *необходимый признак точки перегиба.*

. Достаточный признак *точки перегиба*: если $f''(x_0)=0$ или не существует и при переходе через эту точку $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой $y=f(x)$ с абсциссой $x=x_0$ есть точка перегиба. (Непрерывность функции $f(x)$ в точке x предполагается.)

Геометрический смысл этого признака ясен: если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак, например с «+» на «—», то точка с абсциссой x_0 отделяет вогнутый участок графика $f(x)$ от выпуклого, а это и означает, что данная точка является точкой перегиба.

Порядок работы при нахождении точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости кривой $y=f(x)$ аналогичен порядку отыскания экстремумов и интервалов монотонности, только вместо первой производной рассматривается вторая.

В качестве примеров найдем точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости для кривых из примеров предыдущего параграфа.

Пример 1. $y=ax^2+bx+c$ (при $a>0$).

$$y' = 2ax + b.$$

$$y'' = 2a.$$

Таким образом, в данном примере вторая производная оказалась постоянным положительным числом. Следовательно точек перегиба график этой функции не имеет и на всей числовой оси кривая $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) — вогнута (см. рис. 21).

Пример 2. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + \frac{5}{3}$.

$$y' = x^2 - 4x + 3.$$

$$y'' = 2x - 4.$$

Очевидно, что вторая производная существует на всей числовой оси и обращается в нуль только при $x=2$. Причем при $x<2$, $y''<0$ — кривая выпуклая, а при $x>2$, $y''>0$ — кривая вогнутая. Таким образом, точка кривой с абсциссой $x=2$ отделяет выпуклую дугу от вогнутой и потому является точкой перегиба. Находим и ординату этой точки:

$$y_{\text{т.п.}} = y(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}.$$

На рис. 22 эта точка обозначена «Т. П.» (точка перегиба).

Пример 3. $y=\sqrt[3]{x^2}$.

$$y'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

$$y''=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}.$$

Отсюда видно, что вторая производная заданной функции в нуль нигде не обращается, но не существует при $x=0$. Однако она не меняет знака при переходе через эту точку: и при $x<0$, и при $x>0$, $y''<0$ (причем в самой точке $x=0$ функция непрерывна). Следовательно и до этой точки и после нее кривая $y=\sqrt[3]{x^2}$ является выпуклой. Точка (0, 0) не является точкой перегиба (см. рис. 23).

Упражнения. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графиков следующих функций:

$$y=x^3-5x^2+3x-5;$$

$$y=x+36x^2-2x^3-x^4;$$

$$y=a-\sqrt[3]{x-b};$$

$$y=(x+1)^4+e^x.$$

§ 9. Область изменения функции

Определение 17. *Областью изменения функции $y=f(x)$ называется совокупность всех значений, принимаемых y, когда x принимает все возможные значения из области определения функции.*

Область изменения функции (как и область определения функции) может состоять: а) из отдельных точек, б) из одной точки, в) из одного или нескольких интервалов.

С областью изменения функции тесно связан вопрос об ограниченности или неограниченности функций.

Определение 18. *Функция $y=f(x)$ называется ограниченной, если существует такое число $M>0$, что при всех значениях x из области определения функции выполняется неравенство $|y|\leqslant M$*

Если такого числа $M>0$ не существует, то функция называется *неограниченной.*

Естественно, что для ограниченной функции область изменения не может быть бесконечным интервалом, а для неограниченной — конечным. Например, для неограниченной функции $y=x^3$ областью изменения является открытый бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$, т. е. вся ось y, а для ограниченной функции $y=\sin x$ — конечный замкнутый интервал $[-1, +1]$.

Для нахождения области изменения часто проводят некоторые предварительные преобразования.

Пример 1. Найти область изменения функции

$$y = x^2 - 6x + 11.$$

Преобразуем квадратный трехчлен $x^2-6x+11$, выделив из него полный квадрат: $y=x^2-6x+11=(x-3)^2+2$. Выражение $(x-3)^2$ принимает все неотрицательные значения, а потому областью изменения заданной функции является совокупность всех чисел $y \geqslant 2$. Следовательно, эта функция неограничена.

Пример 2. Найти область изменения функции

$$y = 5\sin x - 12\cos x.$$

Преобразуем выражение $5\sin x - 12\cos x$ введением вспомогательного угла $\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{12}{5}$. Получим

$$y = 13\left(\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x\right) = 13\cdot(\cos\varphi \sin x - \\ - \sin\varphi\cos x) = 13\sin(x-\varphi),$$

откуда

$$-13 \leqslant y \leqslant 13; \quad (|y| \leqslant 13),$$

Следовательно: данная функция является ограниченной.

Пример 3. Найти область изменения функции $y = \frac{x^2-1}{x^2-4}$.

Выразим x через y. После несложных преобразований получаем:

$$x = \pm\sqrt{\frac{4y-1}{y-1}}.$$

Отсюда ясно, что действительным значениям x соответствуют только те значения y, при которых $\frac{4y-1}{y-1} \geqslant 0$.

Решая это неравенство, получим область определения заданной функции: $y \leqslant \frac{1}{4}$ и $y > 0$, т. е. два интервала $\left[-\infty, \frac{1}{4}\right]$ и $(1, \infty)$.

В рассмотренных примерах предварительные преобразования оказались несложными. Однако во многих случаях найти область изменения до полного исследования функции не так уж просто. С другой стороны после полного исследования и построения графика функции область ее изменения становится очевидной. Кроме того, для построения графика функции предварительное нахождение области ее изменения вовсе не является необходимым. Вот почему в общей схеме исследования и построения графиков функций, применяемой в настоящем пособии читатель не найдет такого элемента поведения, как область изменения функции. Мы считаем более целесообразным определить область изменения (и решить вопрос об ограниченности или неограниченности) заданной функции по построенному в результате исследования графику этой функции.

Вопросы для повторения

1. Что называется областью определения функций?
2. Какие функции называются четными (нечетными)?
3. Какие особенности характерны для графика четной (нечетной) функции?
4. Какие функции называются периодическими?
5. Что представляют собой нули функции?
6. В каких точках функция может изменить знак?
7. Дайте определение асимптоты.
8. Каков порядок нахождения асимптот?
9. Дайте определение экстремума функции.
10. Как определить точки экстремума и интервалы монотонности?
11. Как найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости графиков функции?

ГЛАВА III

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

§ 1. Содержание общей схемы исследования функции

Пусть функция $y=f(x)$ задана аналитически. В изучении ее поведения большую помощь может оказать график этой функции. В элементарной математике основным методом построения графиков функций является метод построения «по точкам», который непосредственно вытекает из определения графика функции как геометрического места точек плоскости, абсциссы которых являются значениями независимой переменной, а ординаты — соответствующими значениями функции.

Однако этот метод может привести к существенным ошибкам, так как кривая, соединяющая отдельные точки, проводится по сути дела наугад. Построим, например, по точкам графики двух функций:

$$y_1 = \frac{1}{(3x^2-1)^2} \text{ и } y_2 = \frac{1}{(3x^2+1)^2}.$$

Расчеты запишем в табл. 5.

Таблица 5

x	-2	-1	0	1	2
y_1	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$
y_2	$\frac{1}{169}$	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{169}$

Полученные точки соединим плавными кривыми (рис. 25, *а*); сравнивая их, можно подумать, что рассматриваемые функции изменяются аналогично и довольно близки друг к другу. Однако стоит взять промежуточную точку, например $x=\frac{1}{2}$, чтобы убедиться, в том, что график функции y_1 неверен! В самом деле, при $x = \frac{1}{2}$

$$y_1 = \frac{1}{\left(3 \cdot \frac{1}{4} - 1\right)^2} = 16; \ \left(y_2 = \frac{1}{3}\right),$$

а график, построенный по точкам, нигде не поднимался выше одного деления по оси ординат. Дело в том, что

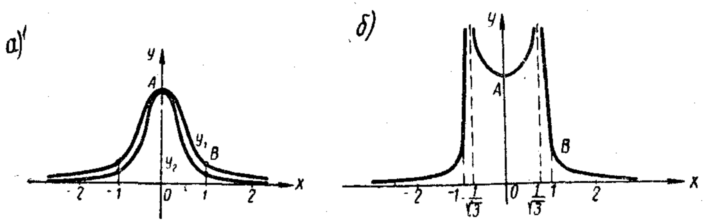


Рис. 25

между точками O и 1 имеется точка разрыва функции y_1. При $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ знаменатель в выражении для y_1 обращается в нуль и функция не существует, а при x, приближающемся к $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (слева или справа — в данном примере безразлично), y_1 безгранично возрастает $\left(\text{то же будет и при } x \to -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. В данном случае соединение точек A и B плавной кривой привело к существенной ошибке. Исправленный график приведен на рис. 25, *б*.

Полное исследование функций, заданных аналитически, проводится методами математического анализа. При исследовании же функции методами элементарной математики целесообразно придерживаться следующей общей схемы исследования:

1. Нахождение области определения и точек разрыва функции.
2. Определение четности или нечетности.
3. Определение периодичности.

4. Определение нулей функции.

5. Определение интервалов знакопостоянства функции и знаков функции в этих интервалах. Напомним, что менять знак функция может только в точках разрыва или в нулевых точках.

6. Нахождение асимптот.

7. Нахождение точек экстремума и интервалов монотонности.

8. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости.

Исследование по этой схеме надо сопровождать постепенным построением графика функции. Для уточнения графика на отдельных участках иногда целесообразно намечать несколько точек, использовав метод построения по точкам.

§ 2. Практическое применение общей схемы исследования функций

Во многих случаях для построения достаточно точного графика функции нет необходимости использовать всю общую схему исследования функции. Иногда даже одно только определение области существования функции дает возможность построить ее график.

Пример 1. $y = \frac{x^2}{x}$

Так как $\frac{x^2}{x} = x$, при $x \neq 0$, то график искомой функции представляет собой биссектрису 1 и 3 координатных углов с «выколотой» точкой в начале координат (рис. 26, *а*).

Пример 2. $y = \frac{x^2-4}{x-2}$.

При $x \neq 2$, сократив дробь, получим

$$y = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2.$$

Таким образом график искомой функции совпадает с графиком линейной функции $y = x + 2$ при всех значениях x кроме $x = 2$ (рис. 26, *а*).

Пример 3. $y = 2^{\log_2 x}$.

По основному тождеству логарифмов имеем при $x>0$ $2^{\log_2 x}=x$, т. е. при $x>0$, $y=x$ (рис. 26, *б*).

Таким образом график искомой функции совпадает с биссектрисой I координатного угла при положительных значениях x.

Пример 4. $y = \sin(\arcsin x) = x$.

По определению $\arcsin x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $\sin(\arcsin x) = x$.

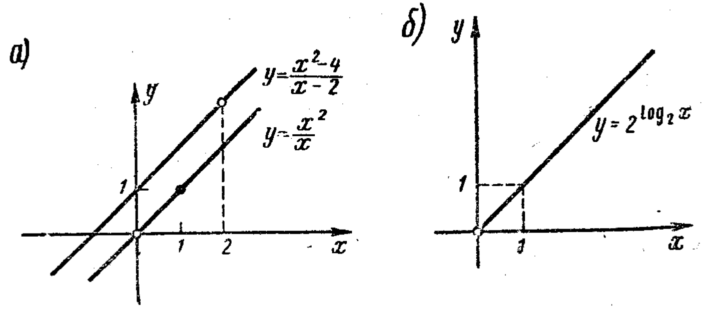


Рис. 26

Таким образом, график искомой функции совпадает с графиком функции $y = x$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 27).

Пример 5. $y=x^{2-\sqrt{\log_2 \sin x}}$.

Для определения области существования функции надо, чтобы подкоренное выражение существовало и было неотрицательным, что возможно лишь при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1; \pm 2, \ldots$). При этих значениях x $\sin x = 1$, $\log_2 \sin x = 0$, $y = x^2$. Таким образом графиком данной функции является множество отдельных точек, расположенных на параболе $y = x^2$ (рис. 28).

Выше приведенные примеры достаточно убедительно показывают, что исследование функции целесообразно начинать с нахождения области определения.

Вообще надо помнить, что использование общей схемы является не самоцелью, а средством для построения достаточно точного графика. Отсюда вытекает, что во-первых этапы исследования должны быть такими, при которых по возможности исключалась бы необходимость выполнения лишней работы, а во-вторых каждый этап исследования должен сопровождаться соответствующим построением. При этом, как мы видели выше, иногда для построения графика функции нет необходимости использовать общую схему полностью.

Пример 6. $y = \frac{x^2-4}{x^2-9}$.

1. Находим область определения. Функция определена на всей числовой оси, кроме тех значений x, при которых знаменатель x^2-9 обращается в 0, т. е. кроме $x = \pm 3$. Поэтому областью определения этой функции является совокупность трех открытых интервалов $(-\infty; -3)$; $(-3; 3)$ $(3; \infty)$.

Таблица 6

x	$[0; 2)$	$(2; 3)$	$(3; \infty)$
y	$+$	$-$	$+$

2. Функция является четной, так как при всех допустимых значениях x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Действительно $\frac{(-x)^2-4}{(-x)^2-9} = \frac{x^2-4}{x^2-9}$; следовательно, искомый график симметричен относительно оси ординат.

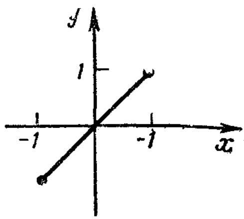


Рис. 27

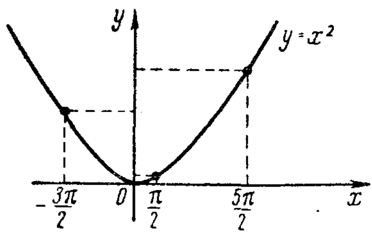


Рис. 28

3. Данная функция не является периодической. Это вытекает хотя бы из того, что интервалы области существования не повторяются периодически.

4. Нули функции $x = \pm 2$.

5. Определяем интервалы знакопостоянства и знаки функции в этих интервалах. В силу симметричности графика относительно оси ординат достаточно определить знаки функции лишь при $x \geqslant 0$.

В табл. 6 в строку x вносим в порядке возрастания значения аргумента, при которых функция может менять знак (т. е. нули функции и точки разрыва). При этом отмечаем в строке y знаки функции для каждого из полученных интервалов. Этот знак определяется по значению функции в одной из точек интервала (например, в интервале [0; 2) может быть взято значение $x = 0$, при котором $y = +\frac{4}{9}$).

Заштрихуем на чертеже ту часть плоскости, где график функции проходить не может. Для определения горизонтальной и вертикальных асимптот исследуем поведение функции на бесконечных ветвях, т. е. при $x \to \infty$ и вблизи точек разрыва

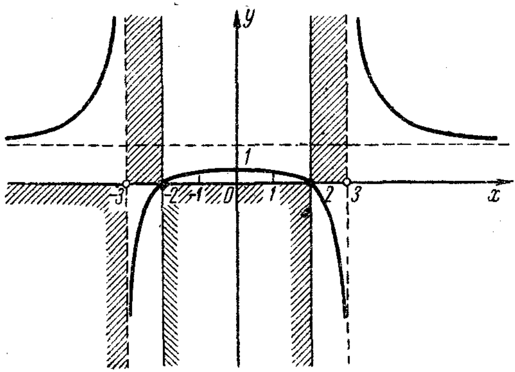


Рис. 29

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{9}{x^2}} = 1.$$

Таким образом искомая кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$. При $x \to 3$ знаменатель дроби $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ стремится к 0, а числитель к 5. Следовательно сама дробь неограниченно возрастает по абсолютной величине, т. е. $y \to \infty$. Что же касается знака, то так как мы уже знаем, на интервале (2; 3) функция отрицательна, а на интервале $(3, \infty)$ функция положительна, т. е. при $x \to 3 - 0$ $y \to -\infty$, а при $x \to 3 + 0$ $y \to +\infty$.

Проведенное исследование позволяет построить график функции $y=\frac{x^2-4}{x^2-9}$ при $x>0$. Изобразив на рисунке построенную часть графика относительно оси Oy, получим окончательный результат. Заметим, что построенная нами кривая представляет собой только более или менее достоверный эскиз графика.

Так, например, может возникнуть вопрос о поведении функции на интервале $(0, 2)$. Где гарантия, что функция на этом интервале монотонно убывает? А может быть она себя ведет так как показано на рис. 29. Правда высказанное предположение легко опровергнуть. Если бы кривая вела себя так как показано на рис. 30, то она пересекала бы горизонтальную асимптоту $y=1$.

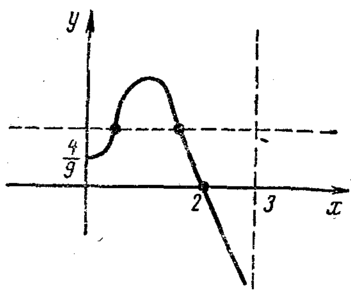


Рис. 30

Для определения возможных точек пересечения решим совместно систему;

$$\begin{cases} y=\frac{x^2-4}{x^2-9}, \\ y=1. \end{cases}$$

$$\frac{x^2-4}{x^2-9}=1;\ x^2-4=x^2-9.$$

Это уравнение не имеет решения.

Таким образом график функции не пересекает горизонтальной асимптоты и наша уверенность в правильности эскиза значительно возрастает. Конечно, мы могли бы рассеять все возникающие сомнения, если бы использовали для построения графика общую схему полностью.

Однако, нашей целью, как раз и является, показать, что во многих случаях достаточно точный график можно построить до завершения общего исследования.

Пример 7. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Область определения этой функции вся числовая ось, так как ни при каком действительном значении x, знаменатель не может обратиться в нуль.

2. Функция, как легко видеть, является четной.

3. Функция не является периодической.

4. Нули функции: $x = \pm 1$.

5. Интервалы знакопостоянства определяем так же, как в предыдущем примере (так как функция четная ограничиваемся исследованием знаков при $x \geqslant 0$).

Таблица 7

x	$[0; 1)$	1	$(1; \infty)$
y	$-$	0	$+$

6. Искомый график имеет горизонтальную атимптоту $y = 1$. Действительно

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

График изображен на рис. 31.

Пример 8. $y = \dfrac{2}{x^2+2x+3}$.

1. Область существования — вся числовая ось, так как знаменатель не обращается в нуль ни при каких действительных значениях x.

2. Эта функция общего вида, т. е. она не является ни четной, ни нечетной.

Действительно $\left|\dfrac{2}{(-x)^2+2(-x)+3}\right| \neq \left|\dfrac{2}{x^2+2x+3}\right|$.

3. Эта функция не является периодической.

4. Нулей у этой функции нет.

5. Таким образом у рассматриваемой функции нет ни нулей, ни точек разрыва и поэтому она везде сохраняет

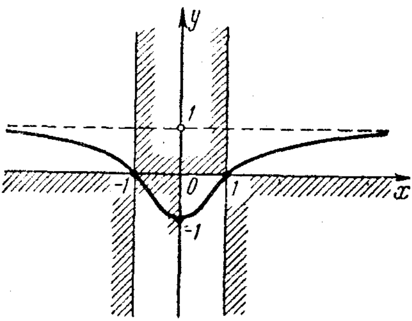


Рис. 31

один и тот же знак, а именно $y > 0$, т. е. график функции целиком расположен выше оси абсцисс.

6. Для определения горизонтальной асимптоты найдем $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x^2 + 2x + 3} = 0$. Таким образом, горизонтальной асимптотой является ось абсцисс.

7. Таким образом, на каком-то интервале функция возрастает, достигает максимума и снова устремляется

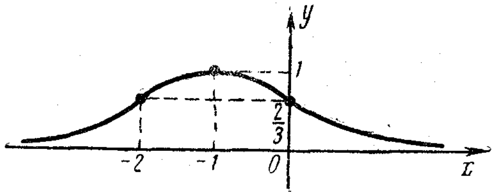


Рис. 32

к нулю. Для уточнения этого утверждения надо найти точку экстремума.

Рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{y} = x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 1) + 2 = (x + 1)^2 + 2$. Таким образом, знаменатель дроби $\frac{2}{x^2 + 2x + 3}$ достигает минимального значения 2 при $x = -1$, следовательно, при этом значении рассматриваемая функция достигает своего максимума $y = 1$.

График изображен на рис. 32.

Отметим, что в примерах 7 и 8 точка экстремума графика (функция $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$ достигает своего максимума $y = \frac{4}{9}$ при $x = 0$, а функция $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ достигает своего минимума $y = -1$ при $x = 0$) определялась с определенной степенью достоверности из соображений симметрии, которые не имеют доказательной силы.

Однако можно привести много примеров таких функций, где экстремумы можно находить строго и без применения дифференциального исчисления.

Пример 9. $y = \log_2 \sin x$.

1. Область существования функции определяется неравенством $\sin x > 0$, что выполняется на интервалах $(-2\pi; -\pi)$; $(0; \pi)$; $(2\pi; 3\pi)$; ... Вообще $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \ldots$. Остальные интервалы сразу заштриховываем, чтобы подчеркнуть, что на этих участках графика функции нет.

2. Так как интервалы, где определена функция располагаются не симметрично относительно начала координат, то рассматриваемая функция не будет ни четной, ни нечетной, т. е. является функцией общего вида.

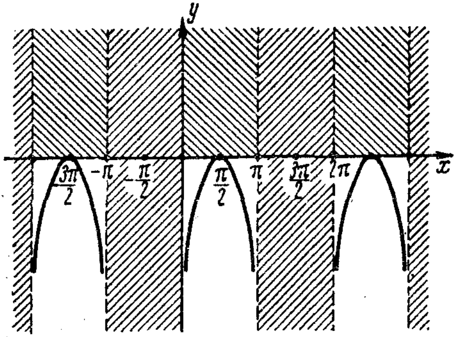


Рис. 33

3. Функция является периодической и период ее равен $T = 2\pi$. Действительно, при всех допустимых значениях x выполняется равенство $\log_2 \sin(x + 2\pi) = \log_2 \sin x$. Это обстоятельство позволяет ограничиться построением графика функции на интервале $(0; \pi)$, а затем в силу периодичности повторить эту кривую в каждом из вышеперечисленных интервалов области существования.

4. Для определения нулей исследуемой функции надо решить уравнение $\sin x = 1$. Откуда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, а на рассматриваемом интервале $(0; \pi)$ $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Так как $\sin x \leqslant 1$, то $y \leqslant 0$ и график располагается ниже оси абсцисс.

6. При $x \to \pi + 0$ и $x \to \pi - 0$ $\sin x \to 0$, а функция $y \to -\infty$.

Проделанное исследование позволяет построить график (рис. 33). Заметим, что и в этом случае интервалы монотонного изменения и точки экстремума были найдены без применения аппарата дифференциального исчисления с достаточной точностью. Однако, это бывает лишь в отдельных случаях.

Пример 10. $y = 3x - x^3$.

1. Областью существования функции является вся числовая ось, т. е. $-\infty < x < \infty$.

Таблица 8

x	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
y	$+$	0	$-$

2. Как легко видеть исследуемая функция является нечетной, т. е. график ее симметричен относительно начала координат.

3. Функция непериодическая.

4. Для определения нулей решим уравнение $3x - x^3 = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

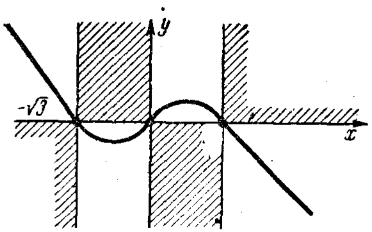


Рис. 34

5. Для определения интервалов знакопостоянства заполним таблицу (так как функция нечетная ограничимся исследованием знаков при $x > 0$).

6. Для определения поведения функции при $x \to \infty$ получим $\lim\limits_{x\to\infty} (3x - x^3) = -\infty$, т. е. асимптот нет.

Если ограничиться и в этом примере элементарной частью общей схемы исследования функции, то можно будет построить эскиз графика, изображенного на рис. 34.

Однако определить координаты точек экстремума в этом случае элементарно весьма затруднительно. Поэтому целесообразно продолжить общую схему исследования для уточнения построенного эскиза.

7. Для нахождения экстремальных значений функции надо найти производную $y' = 3 - 3x^2$, а затем определить ее корни, решив уравнение

$$3 - 3x^2 = 0; \; x_{1,2} = \pm 1.$$

Так как функция нечетная, ограничимся исследованием поведения функции только вблизи точки $x = 1$. На интервале $(0; 1)$ $y' > 0$ (например, при $x = \frac{1}{2}$, $y' = \frac{9}{4} > 0$, т. е. на этом интервале функция монотонно возрастает). При $x = 1$, $y' = 0$, а на интервале $(1; \infty)$ $y' < 0$ (например, при $x = 2$, $y' = -9 < 0$), т. е. на этом интервале функция монотонно убывает.

Следовательно, при переходе через точку $x = 1$ функция переходит с возрастания на убывание и при $x = 1$ функция достигает максимума $y = 2$. Из соображений симметрии (так как функция нечетная) ясно что при $x = -1$ функция достигает своего минимума.

Таблица 9

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	min $y=-2$	$\nearrow$	max $y=2$	$\searrow$

Результаты исследования отразим в табл. 9 (стрелками $\nearrow$ и $\searrow$ обозначено возрастание и убывание функции на соответствующих интервалах).

8. Рассматривая эскиз, можно предположить, что на интервале $(-\infty; 0)$ график функции — вогнутый, на интервале $(0; \infty)$ — выпуклый, а начало координат является точкой перегиба. Проверим это предположение.

Действительно при $x < 0$, $y'' > 0$ — график функции вогнутый, при $x > 0$, $y'' < 0$ — график выпуклый, следовательно, начало координат является точкой перегиба.

Результаты исследования сведем в табл. 10. (Значками $\cup$ и $\cap$ обозначена вогнутость и выпуклость графика функции на соответствующих интервалах.)

Учитывая полученные результаты, можно значительно уточнить эскиз графика функции (рис. 35).

Пример 11. $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$.

Таблица 10

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$+$	0	$-$
y'		3	
y	$\cup$	0	$\cap$

1. Областью существования функции является множество действительных значений x, кроме $x=1$.

2. Функция общего вида, так как

$$\left|\frac{(-x^2)+1}{(-x)-1}\right| \neq \left|\frac{x^2+1}{x-1}\right|.$$

3. Функция непериодическая.

4. Нулей у функции нет.

5. Так как нулей у функции нет, она может изменить свой знак только в точке разрыва, т. е. при $x = 1$.

Таблица 11

x	$(-\infty; 1)$	$(1; \infty)$
y	$-$	$+$

6. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва. При $x \to 1-0$, $y \to -\infty$; при $x \to 1+0$, $y \to \infty$. Таким образом, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика функции.

При $x \to \pm\infty$, $y \to \pm\infty$, т. е. горизонтальной асимптоты у графика нет. Проверим нет ли у графика исследуемой функции наклонной асимптоты $\tilde{y}=kx+b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+1}{x-1} - x\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1-x^2+x}{x-1} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1,$$

т. е. данное уравнение имеет наклонную асимптоту $\tilde{y}=$ $=x+1$.

Проведенное исследование позволяет построить эскиз графика (рис. 36).

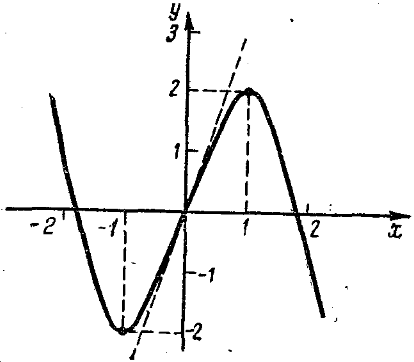


Рис. 35

Для уточнения построенного эскиза, в частности для определения координат точек экстремума, продолжим исследование.

7. Для нахождения экстремальных значений функции надо найти y' и y'':

$$y'=\frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}.$$

$y'=0$ при $x^2-2x-1=0$, т. е. $x=1\pm\sqrt{1+1}=1\pm\sqrt{2}$.

Производная, как и всякая функция, может изменить свой знак, либо в нулевых точках, либо в точках разрыва, т. е. в данном случае в точках $x=1-\sqrt{2}$; $x=1$; $x=1+\sqrt{2}$.

Результаты исследования, как обычно, выпишем в табл. 12:

x	$(-\infty; 1-\sqrt{2})$	$1-\sqrt{2}$	$(1-\sqrt{2}; 1)$	1	$(1; 1+\sqrt{2})$	$1+\sqrt{2}$	$(1+\sqrt{2}; \infty)$
y'	+	0	−	не существует	−	0	+
y	↗	max $y=2-2\sqrt{2}$ $y\approx-0,8$	↘	не существует	↘	min $y=2+2\sqrt{2}$ $y\approx 4,8$	↗

$$y'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)^3 - 2(x-1)(x^2-2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

При $x < 1$ $y'' < 0$ — график выпуклый.
При $x > 1$ $y'' > 0$ — график вогнутый.

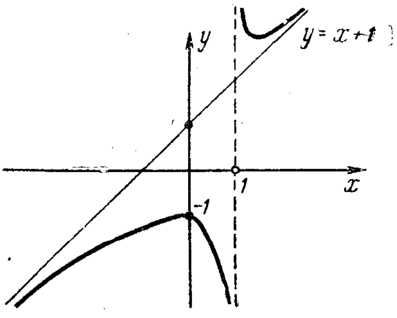


Рис. 36

Учитывая проведенное исследование, уточним наш эскиз (рис. 37).

Пример 12. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

1. Областью существования функции является любое действительное число, кроме $x = 0$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как

$$\left|e^{\frac{1}{(-x)}}\right| \neq \left|e^{\frac{1}{x}}\right|.$$

3. Функция не является периодической, хотя бы потому, что точка разрыва $x = 0$ не повторяется периодически.

4. Нулей у функции нет.

5. При всех допустимых значениях x функция положительна.

6. Исследуем поведение функции вблизи точки разрыва $x = 0$:

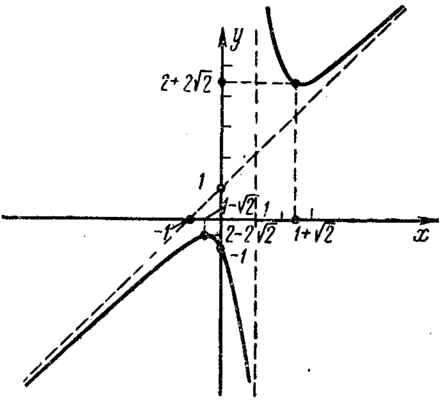


Рис. 37

$$\text{при } x \to 0 - 0 \ \frac{1}{x} \to -\infty, \ y \to 0;$$

$$\text{при } x \to 0 + 0 \ \frac{1}{x} \to +\infty, \ y \to +\infty.$$

Исследуем также поведение функции на бесконечных ветвях:

$$\text{при } x \to \pm\infty \ \frac{1}{x} \to 0, \ y \to e^0 = 1.$$

По результатам исследования построим эскиз графика (рис. 38).

7. Продолжим исследование: $y' = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$. Отсюда видно, что при всех допустимых зна-

чениях x производная отрицательна и, следовательно, функция убывает и на интервале $(-\infty; 0)$, и на интервале $(0; \infty)$, что соответствует вышеприведенному эскизу.

Далее

$$y'' = -(e^{\frac{1}{x}} \cdot x^{-2})' = -\left[-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^4} - \frac{2e^{\frac{1}{x}}}{x^3}\right] = \frac{e^{\frac{1}{x}}(1+2x)}{x^4}.$$

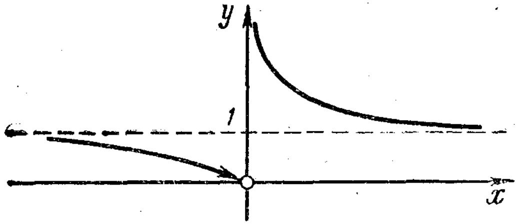


Рис. 38

Мы не можем утверждать, что вторая производная также сохраняет постоянный знак при всех допустимых

Таблица 13

x	$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	0	$(0; \infty)$
y''	$-$	0	$+$	не существует	$+$
y'		$-\frac{4}{e^2}$		не существует	
y	$\cap$	точка перегиба	$\cup$	не существует	$\cup$

значениях x. Легко видеть, что знак второй производной меняется в точке $x = -\frac{1}{2}$. Результаты исследования, как обычно, сведем в табл. 13:

Таким образом, и в данном случае полное исследование функции по общей схеме существенно изменило наше представление об эскизе графика (рис. 39).

Пример 13. $y = \sqrt[3]{x^2} - x$.

1. Область существования — вся числовая ось.
2. Функция общего вида.

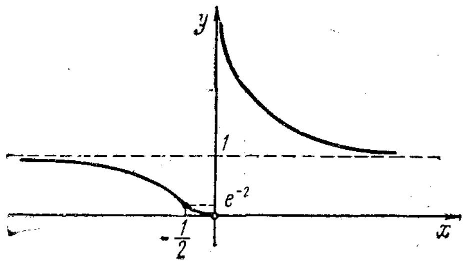


Рис. 39

3. Функция непериодическая.

4. Нули функции могут быть найдены из уравнения $\sqrt[3]{x^2} - x = 0$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = 1$.

5. Функция может изменить свой знак только при $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Отсюда имеем:

Таблица 14

x	$(-\infty; 0)$	$(0,1)$	$(1, \infty)$
y	+	+	−

6. Для определения поведения функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ находим:

$$\lim_{x\to\infty} y = -\infty; \ \lim_{x\to-\infty} y = \infty,$$

т. е. функция не имеет горизонтальных асимптот.

7. Для определения экстремальных точек находим y' и y'':

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1; \ \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = 0; \ 2 - 3\sqrt[3]{x} = 0;$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{2}{3}; \ x = \frac{8}{27}.$$

Таблица 15

x	$(-\infty; 0)$	0	$\left(0; \frac{8}{27}\right)$	$\frac{8}{27}$	$\left(\frac{8}{27}; \infty\right)$
y'	$-$	не существует	$+$	0	$-$
y	↘	min $y=0$	↗	max $y=\frac{4}{27}$	↘

Таким образом, исследуемая функция при $x = 0$ имеет минимум, а при $x = \frac{8}{27}$ максимум; при $x = 0$ касательная к кривой вертикальна (т. е. имеет место так называемая точка возврата). $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Отсюда видно, что знак второй производной может меняться при $x = 0$, т. е. в точке ее разрыва.

Таблица 16

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$-$	не существует	$-$
y'		не существует	
y	⌒	0	⌒

Следовательно, график данной функции — выпуклая кривая (рис. 40).

Упражнения. Пользуясь общей схемой исследования функции, построить графики следующих функций:

1. $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; $y=0{,}5^{\log_2 x}$; $y=\cos(\arccos x)$; $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$;

$$y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x);\ y=\log_x x^2;\ y=\log_{x^2} x;\ y=\log_{x^2} x^2;$$

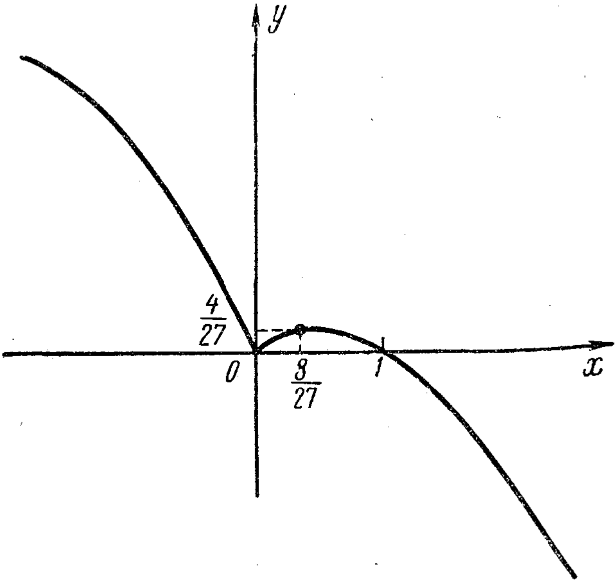


Рис. 40

$$y=x^{3-\sqrt{\log_2 \cos x}};\ y=\frac{\lg(-x)}{\sqrt{2-x}};\ y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{\log_2 \sin x}}}.$$

2. $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x+3}$; $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+4x+4}$; $y=\dfrac{x^2-6x+5}{x^2+x+1}$;

$$y=\frac{x^2}{2x-1};\ y=\frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+3};\ y=\frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4};$$

$$y=\frac{x^2-6x+9}{x^2+x+1};\ y=\frac{2x-1}{x^2};\ y=\frac{x^2+x+1}{x^2-6x+5};$$

$$y=\frac{x^2+x+1}{x^2+4x+4};\quad y=\frac{x^2+x+1}{2x^2+1}.$$

3. $y=2^{\sin x}$; $y=2^{\cos x}$; $y=2^{\operatorname{ctg} x}$.

4. $y=\log_{\frac{1}{2}}\sin x$; $y=\log_{\frac{1}{2}}\cos x$; $y=\log_2\cos x$.

5. $y=\sin\frac{1}{x}$; $y=\operatorname{tg}\frac{1}{x}$; $y=\arcsin\frac{1}{x}$; $y=\arccos\frac{1}{x}$.

6. $y=\operatorname{cosec} x$; $y=\sec x$; $y=\frac{1}{\arcsin x}$; $y=\frac{1}{\arccos x}$;

$$y=\frac{1}{\operatorname{arctg} x};\quad y=\frac{1}{\operatorname{arcctg} x}.$$

7. $y=\log_{\cos x} x$; $y=\log_{x+1} x$.

ГЛАВА IV

ЧАСТНЫЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

§ 1. Построение графиков функций путем движений без деформаций

Часто бывает, что график функции $y = f(x)$ заведомо известен (например, если $f(x)$ — одна из основных элементарных функций или если он был уже построен при решении одной из предыдущих задач), а требуется построить график функции, тесно связанной с данной.

В ряде случаев это может быть сделано довольно просто.

1. Построение графика функции $y=f(x)+a$

Правило 1. *Для того чтобы построить график функции $y = f(x) + a$, надо кривую $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси ординат на a единиц (с учетом знака a) без деформации (как одно целое).*

В самом деле, если $a > 0$ и нам известен график функции $y = f(x)$ (рис. 41), то для произвольной точки x_0 (из области определения функции) отрезок

$$AC = f(x_0),$$

а отрезок

$$BC = f(x_0) + a.$$

Отсюда очевидно, что разность этих ординат $BC - AC = a$, т. е. $BC = AC + a$, и для получения точки графика функции $y = f(x) + a$ при $x = x_0$ надо к ординате функции в этой точке $y=f(x_0)$ прибавить величину a. Точка x_0 была выбрана произвольно, а потому наше рассуждение справедливо для всех точек в области определения функции $y = f(x)$. При $a < 0$ ординаты кривой $y = f(x) + a$ будут меньше соответствующих ординат кривой $y=f(x)$ на величину a, т. е. сдвиг надо будет произвести в отрицательном направлении вдоль оси ординат (вниз).

Примеры.

1. Графики функций $y = kx + b$ при постоянном значении k и различных значениях b представляют собой семейство параллельных прямых, наклоненных к оси

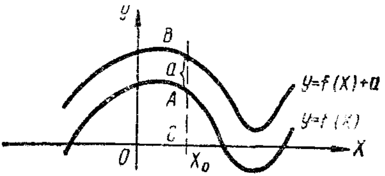


Рис. 41

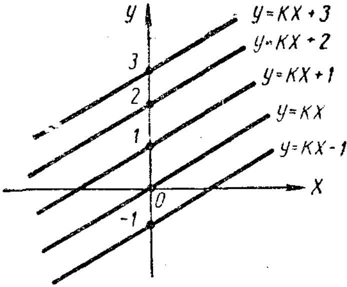


Рис. 42

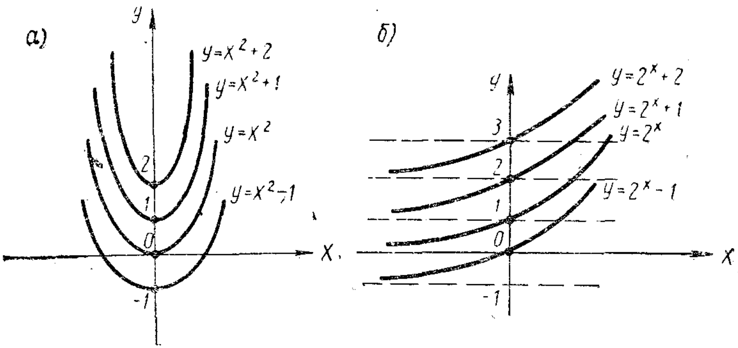


Рис. 43

абсцисс под одинаковым углом, тангенс которого равен k, и отсекающих на оси ординат различные отрезки b (рис. 42).

2. Графики функций $y = ax^2 + m$ при постоянном значении a и различных значениях m представляют собой семейство парабол (рис. 43, a), отсекающих на оси ординат различные отрезки m. В данном примере m является

ординатой вершины параболы. Обратим внимание и на то, что m является наименьшим значением y, если $a>0$ и ветви параболы направлены вверх, или наибольшим значением y, если $a<0$ и ветви направлены вниз.

3. Графики функций $y = a^x + m$ при постоянном значении a ($a > 0$, $a \neq 1$ — по определению показательной функции) и переменном m представляют собой семейство графиков показательной функции. На рис. 43,б показано несколько кривых из такого семейства при $a>1$. На рисунке показано, что соответственно смещается на величину m и горизонтальная асимптота графика.

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y = \sin x$; $y = \sin x + 1$; $y = \sin x - 1$.

2. $y = \frac{6}{x}$; $y = \frac{6}{x} - 1$; $y = \frac{6}{x} + 1$.

3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$; $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

4. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; $y = \log_{\frac{1}{2}} x + 1$; $y = \log_{\frac{1}{2}} x - 1$.

2. Построение графика функции $y=f(x+a)$

Правило 2. *Для того чтобы построить график функции $y = f(x + a)$, надо кривую $y = f(x)$ сдвинуть без деформаций вдоль оси абсцисс на а единиц (с учетом знака а).*

Пусть $a > 0$ и известен график функции $y = f(x)$ (рис. 44). Рассмотрим значение функции $y = f(x+a)$ в произвольной точке x_0:

$$y = f(x_0 + a) = AB.$$

Но такая же ордината будет и у кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0 + a$:

$$A'B' = f(x_0 + a) = AB.$$

При сравнении кривых видно, что в силу произвольности x_0 функция $y = f(x + a)$ проходит такие же значения, что и функция $y = f(x)$, только на a единиц левее. Следовательно, график функции $y = f(x + a)$ можно получить путем сдвига кривой $y=f(x)$ вдоль оси Ox на величину a в отрицательном направлении ($a>0$). Если $a<$ <0, то кривую $y=f(x+$ $+a)$ можно построить аналогично путем сдвига графика $y=f(x)$ в положительном направлении.

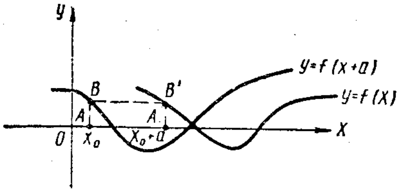


Рис. 44

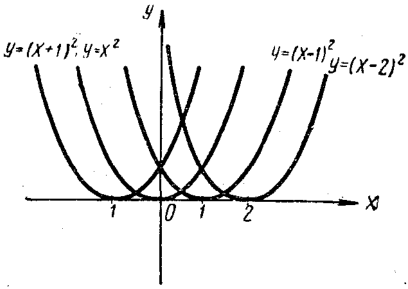


Рис. 45

Примеры.

1. Графики функций $y=a(x+n)^2$ при постоянном значении a и переменном n представляют собой «семейство» парабол, полученных сдвигом параболы $y=ax^2$ вдоль оси абсцисс на величину $-n$. На рис. 45 показано такое «семейство» при $a=1$.

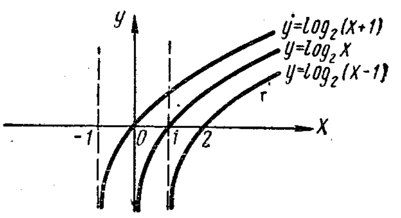


Рис. 46

2. Графики функций $y=\log_a(x+n)$ при постоянном основании $a(a>0;\ a\neq1)$ и переменном n представляют собой семейство логарифмических кривых. На рис. 46 показано такое семейство при $a=2$. При смещении кривой на n единиц соответственно смещается и вертикальная асимптота графика.

3. Графики функций $y = \sin(x + n)$ представляют собой семейство синусоид, сдвинутых вдоль оси абсцисс (рис. 47).

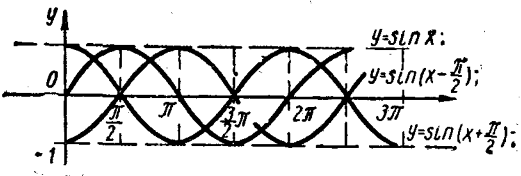


Рис. 47

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.
2. $y = 3^x$; $y = 3^{x+1}$; $y = 3^{x-1}$.
3. $y = \frac{6}{x}$; $y = \frac{6}{x-1}$; $y = \frac{6}{x+1}$.

Правила 1 и 2 для построения графиков функций объединим и получим правило 3 — для построения графика функции

$$y = f(x + n) + m.$$

3. Построение графика функции $y = f(x + n) + m$

Правило 3. *Для того чтобы построить график функции $y = f(x + n) + m$, надо кривую $y = f(x)$ сдвинуть вдоль оси абсцисс на «$-n$» единиц, и вдоль оси ординат на «m» единиц (с учетом знаков m и n).*

Примеры.

1. График функции $y = a(x + n)^2 + m$ представляет собой параболу, вершина которой находится в точке B $(-n, m)$. График строится сдвигом параболы $y = ax^2$ (имеющей вершину в начале координат) на $-n$ вдоль оси абсцисс и на m вдоль оси ординат. На рис. 48 показано получение графика $y = (x-2)^2 - 1$ путем сдвига параболы $y = x^2$ на две единицы вправо и на одну единицу вниз.

2. Графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. Известно, что для определения координат вершины параболы надо преобразовать квадратный трехчлен к виду $y = a(x + n)^2 + m$ путем выделения из него полного квадрата. Проделаем это в общем виде:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) -$$

$$- \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a},$$

где $D = b^2 - 4\,ac$ (дискриминант). Из полученного выражения видно, что график этой функции может быть получен из графика $y = ax^2$ путем сдвига последнего вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$ и вдоль оси Oy на $-\frac{D}{4a}$, а потому координаты вершины параболы определяются по формулам:

$$x_B = -\frac{b}{2a};\ y_B = -\frac{D}{4a}.$$

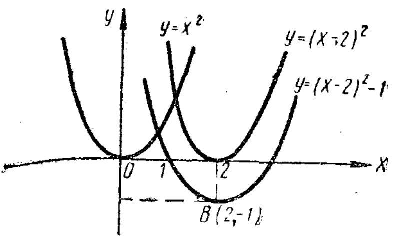


Рис. 48

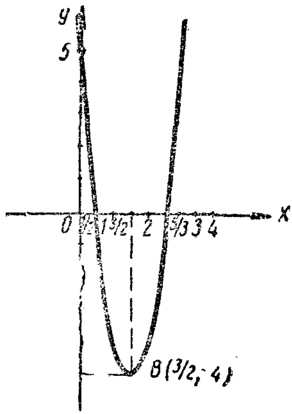


Рис. 49

Умение находить координаты вершины параболы по полученным формулам имеет значение не только для построения графиков квадратных трехчленов, но и при решении (средствами элементарной математики) многих задач на определение наибольших и наименьших значений.

Для построения графика квадратного трехчлена

$$y = 4x^2 - 12x + 5$$

определим координаты вершины параболы:

$$D = b^2 - 4ac = 144 - 80 = 64;$$

$$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2};$$

$$y_B = -\frac{D}{4a} = -\frac{64}{16} = -4.$$

или

$$y_B = y\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12\left(\frac{3}{2}\right) + 5 = -4.$$

Точка пересечения параболы с осью ординат $y=5$ (определяется из условия $x=0$), а точки пересечения с осью абсцисс определяются из уравнения

$$4x^2 - 12x + 5 = 0.$$

Получим $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{5}{2}$. Напомним, что точки пересечения графика с осью абсцисс, т. е. нули функции, являются вещественными корнями уравнения ax^2+bx+ $+c=0$.

График построен на рис. 49.

3. Рассмотрим график функции

$$y = \frac{ax+b_1}{ax+b_2}$$

(график дробно-линейной функции).

Для выяснения характера, а затем и для построения графика этой функции преобразуем ее выражение, выделив целую часть, т. е. разделив числитель на знаменатель. Получаем

$$y = \frac{ax+b_1}{ax+b_2} = 1 + \frac{b_1-b_2}{ax+b_2} = 1 + \frac{\frac{b_1-b_2}{a}}{x+\frac{b_2}{a}},$$

откуда видно (на основании правила 3), что график этой функции получается сдвигом гиперболы

$$y = \frac{\frac{b_1-b_2}{a}}{x} = \frac{k}{x}$$

вдоль оси ординат на отрезок, равный единице, вверх и вдоль оси абсцисс на отрезок, равный $-\frac{b_2}{a}$.

Для примера построим график функции

$$y = \frac{x+13}{x+1} = 1 + \frac{12}{x+1}.$$

Прежде всего строим гиперболу $y = \frac{12}{x}$, а затем сдвигаем ее на отрезок, равный единице, вверх и на отрезок, равный единице, влево (рис. 50).

В рассмотренном примере коэффициенты при x в числителе и знаменателе заданной функции были одинаковы.

В общем случае преобразования несколько усложняются:

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}\frac{\left(x+\frac{b}{a}\right)}{\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c}\left(\frac{x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{d}}{x+\frac{d}{c}}\right) =$$

$$= \frac{a}{c}\left(1+\frac{\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}\right) = \frac{a}{c}+\frac{\frac{b}{c}-\frac{ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}} =$$

$$= \frac{a}{c}+\frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}.$$

Замечания. 1. Если $bc-ad=0$, то $bc=ad$ и $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, т. е. в этом случае коэффициенты в числителе и знаменателе пропорциональны. Например, $y=\frac{2x+4}{x+2}$, но здесь при $x \neq -2$ дробь можно сократить

$$y = \frac{2(x+2)}{x+2} = 2.$$

(Точка $x=-2$ является точкой устранимого разрыва). Графиком такой функции является прямая $y=2$ с одной «выколотой» точкой, так как $x \neq -2$.

2. Для построения графика дробно-линейной функции $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ можно

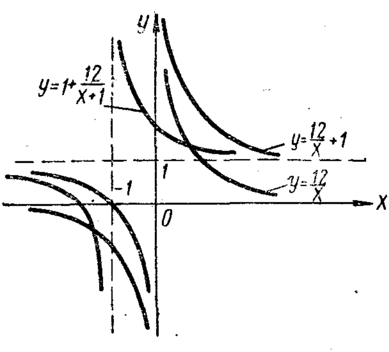


Рис. 50

использовать более простой способ, основанный на нахождении его асимптот. Прежде всего определяем значение x, при котором знаменатель обращается в 0: $cx+$ $+d=0$; $x=-\frac{d}{c}$. Это уравнение вертикальной асимптоты. Затем находим горизонтальную асимптоту, рассматривая поведение заданной функции на бесконечных ветвях.

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a+\frac{b}{x}}{c+\frac{d}{x}}\to\frac{a}{c},\ x\to\pm\infty$$

$y=\frac{a}{c}$ — горизонтальная асимптота.

После нахождения асимптот остается найти несколько точек (проще всего взять точки пересечения с осями координат) и тогда можно строить гиперболу, являющуюся графиком заданной функции.

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y=x^2-7x+12.$
2. $y=\log_2(x-1)+2$
3. $y=2^{x+1}+3.$
4. $y=\frac{x-3}{x+2}.$
5. $y=\frac{4x-3}{2x-4}.$

При построении рассмотренных в настоящем параграфе графиков функций производился сдвиг какого-либо известного графика вдоль осей координат, поэтому такой метод и можно отнести к «механическим» методам построения графиков. Рассмотрим теперь другой «механический» метод — отражение (без деформаций).

4. Построение графика функции $y=-f(x)$

Правило 4. *Для того чтобы построить график функции $y=-f(x)$, надо построить изображение, симметричное графику функции $y=f(x)$ относительно оси абсцисс.*

Пусть график функции $y=f(x)$ известен (рис. 51). Возьмем произвольную точку x_0 из области определения функции $y=f(x)$. Значение функции $y=-f(x)$ в этой точке будет $-f(x_0)$, а значение функции $y=f(x)$ — соответственно $f(x_0)$. Они отличаются друг от друга только знаком. Откуда и очевидна симметричность точек M_1 и M относительно оси абсцисс, а в силу произвольности выбора x_0 — и справедливость правила 4.

Пример. Построить график функции $y=-\cos x$.

Построение искомого графика по графику $y=\cos x$ совершенно очевидно (рис. 52).

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y=-\operatorname{tg} x$. **2.** $y=-4x^2+12x-5$. **3.** $y=-\frac{1}{x-1}$.

4. $y=-\log_2 x$ (сравнить с графиком $y=\log_{\frac{1}{2}} x$).

5. Построение графика функции $y=f(-x)$

Правило 5. *Для того чтобы построить график функции $y=f(-x)$, надо построить изображение, симметричное графику функции $y=f(x)$ относительно оси ординат.*

В самом деле, пусть вид графика $y=f(x)$ известен (рис. 53). В произвольной точке x_0 отрезок AB равен (и по величине, и по знаку) значению функции $y=f(x_0)$. Функция же $y=f(-x)$ принимает такое же значение при $x=-x_0$, т. е. в точке, симметричной относительно оси ординат $A_1B_1=AB$. Точки B и B_1 симметричны относительно оси ординат. А тогда из произвольности выбора точки x_0 следует справедливость правила 5.

Пример. Построить график функции $y=\log_2(-x)$.

График функции $y=\log_2 x$ известен. Эта функция имеет областью определения один открытый интервал $(0;\infty)$, так как логарифмы существуют лишь для положительных чисел. График этой функции построен на рис. 54 (при $x>0$). Областью же определения функции $y=\log_2(-x)$ будет множество всех отрицательных чисел $x<0$, ибо тогда $-x$ будет положительным и y существует. График функции $y=\log_2(-x)$ строится путем «отражения» графика функции $y=\log_2 x$ относительно оси ординат (см. рис. 54).

Упражнения. Построить графики следующих функций:

$$\textbf{1.}\ y=2^{-x}\left(\text{сравнить с графиком } y=\left(\frac{1}{2}\right)^x\right).$$

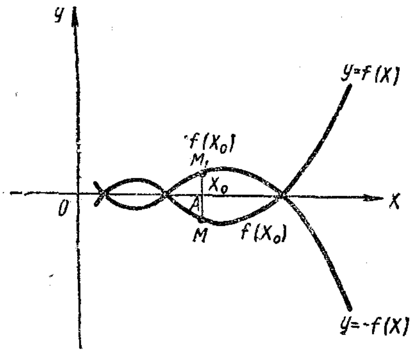


Рис. 51

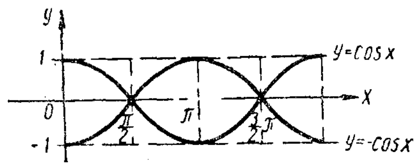


Рис. 52

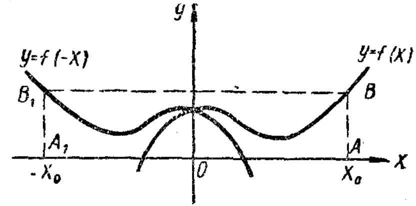


Рис. 53

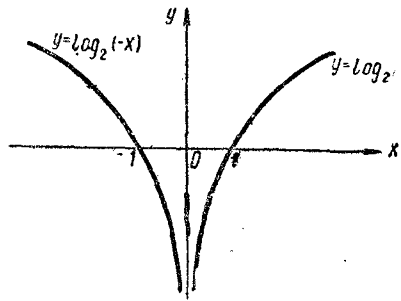


Рис. 54

2. $y=\cos(-x)$ (объяснить, почему полученный график совпадает с графиком функции $y=\cos x$).

3. $y=\operatorname{ctg}(-x)$.

При построении графиков функций $y=-f(x)$ и $y=f(-x)$ по правилам 5 и 6 приходится строить изображения, симметричные графику $y=f(x)$ относительно одной из осей координат. Однако роль оси симметрии (или «зеркала», относительно которого происходит отражение) могут выполнять не только оси координат, но и другие прямые, например, биссектриса первого и третьего координатных углов.

6. Построение графиков обратных функций

Приступая к построению графиков обратных функций, необходимо уяснить, что такое прямая и обратная функция и как они связаны друг с другом. Рассмотрим пример: площадь круга $S=\pi R^2$ является функцией его радиуса

$$S=f(R). \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет определить величину площади круга S, если известен его радиус R. Очевидно, и наоборот: если известна площадь S, то можно определить и радиус круга по формуле

$$R=\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

Отсюда видно, что переменная величина R есть функция от переменной величины S

$$R=\varphi(S). \qquad (2)$$

При сравнении функциональных зависимостей (1) и (2) видно, что аргумент и функция поменялись ролями.

Таблица 17

	Функция	Аргумент	Вид зависимости
1-я функциональная зависимость	S	R	$y=\pi x^2$
2-я функциональная зависимость	R	S	$y=\sqrt{\frac{x}{\pi}}$

Такого рода функциональные зависимости и называются *взаимно-обратными.*

Рассмотрим еще один пример: пусть задана функция

$$y = 3x + 5.$$

Если же считать y аргументом, а x функцией, то эта функциональная зависимость выразится формулой

$$x = \frac{y-5}{3}.$$

Но аргумент принято обозначать через x, а функцию через y. Меняя местами x и y, получим

$$y = \frac{x-5}{3}.$$

Функции $y = 3x + 5$ и $y = \frac{x-5}{3}$ являются взаимно-обратными (каждая из них показывает, как зависит аргумент другой от своей функции).

Вообще равенство $y = f(x)$ показывает, что каждому допустимому значению переменной величины x соответствует вполне определенное значение переменной величины y. Если это же равенство $y = f(x)$ позволяет по каждому допустимому значению y найти *одно и только одно* значение величины x, то оно же определяет и величину x как некоторую функцию от y. Обозначим эту функцию

$$x = \varphi(y).$$

Перейдя к обычным обозначениям, получим функцию

$$y = \varphi(x),$$

которая называется обратной по отношению к функции $y = f(x)$.

Следовательно, для того чтобы составить формулу обратной функции, зная формулу прямой функции, необходимо:

1) разрешить уравнение $y = f(x)$ относительно x;

2) поменять местами x и y.

Примеры.

Из таблицы видно, что обратной функцией для линейной является также линейная функция; для *показательной — логарифмическая* и т. д. Отметим еще раз, что понятия прямой и обратной функций относительны:

Таблица 18

Прямая функция $y = f(x)$	Выражение x $x = \varphi(y)$	Обратная функция $y = \varphi(x)$
$y = kx + b$	$x = \frac{y}{k} - \frac{b}{k}$	$y = \frac{1}{k}x - \frac{b}{k}$
$y = a^x \begin{pmatrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{pmatrix}$	$x = \log_a y$	$y = \log_a x$
$y = x^3$	$x = \sqrt[3]{y}$	$y = \sqrt[3]{x}$

если логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной, то и наоборот, показательная функция является обратной по отношению к логарифмической. Вот почему такие функции называются *взаимно-обратными.*

Заметим, что область изменения функции $y = f(x)$ становится областью определения для обратной функции, так как *каждому допустимому* значению y (а их множество и составляет область изменения заданной функции) можно поставить в соответствие единственное значение x.

Например, для показательной функции $y = 2^x$ областью изменения является множество всех положительных чисел $y > 0$, это же множество является и областью определения для обратной функции $y = \log_2 x$.

Область же определения функции $y = f(x)$, для которой существует обратная функция, становится областью изменения последней. В приведенном примере областью определения функции $y = 2^x$ является совокупность всех действительных чисел. Для обратной же функции $y = \log_2 x$ множество всех действительных чисел является областью изменения.

Чтобы решить вопрос, для какой функции $y = f(x)$ существует обратная функция, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим зависимость площади круга от его радиуса:

$$y = \pi x^2.$$

Эта зависимость указывает, что каждому значению x соответствует единственное значение y. Обратное же, вообще говоря, неверно: каждому допустимому значению y по этой формуле соответствуют два значения x; например, значению $y=\pi$ соответствуют значения $x=+1$ и $x=-1$. Поэтому, если функцию $y=\pi x^2$ рассматривать на всей числовой оси, то она не имеет обратной функции. Однако если эту функцию рассматривать только при положительных значениях x, то она будет обладать обратной функцией:

$$y=\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

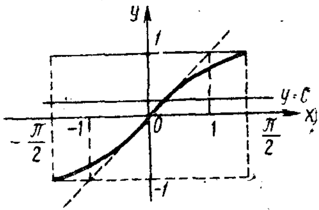


Рис. 55

Пример 2. Функция $y=\sin x$ показывает, что каждому действительному значению x соответствует вполне определенное значение y в интервале от -1 до $+1$. Но каждому значению y из этого интервала соответствует бесконечное множество значений x (например, значению $y=\frac{1}{2}$ соответствуют значения x: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$ и т. д.). Поэтому если функцию $y=\sin x$ рассматривать на всей числовой оси, то она не имеет обратной функции. Если же эту функцию рассматривать, например, при $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, то каждому допустимому значению y соответствует единственное значение x. В этом проще всего убедиться графически.

Прямая $y=c$ пересекает кривую $y=\sin x$ при $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $|y|\leqslant 1$ только в одной точке, т. е. при этом существует единственное значение x, при котором $\sin x=c$. Поэтому при $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ функция $y=\sin x$ (рис. 55) имеет обратную функцию $y=\arcsin x$.

Аналогично можно убедиться в том, что функции:

$$y=\cos x \text{ при } 0\leqslant x\leqslant\pi;$$

$$y=\operatorname{tg} x \text{ при } -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2};$$

$$y = \operatorname{ctg} x \text{ при } 0 < x < \pi$$

имеют обратные функции: $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Нетрудно заметить, что во всех этих примерах прямая функция рассматривается на таком интервале, на котором она монотонна и проходит все свои значения. Можно вообще доказать, что если функция $y=f(x)$ монотонна в интервале $[a, b]$, то при $a \leqslant x \leqslant b$ обратная ей функция существует.

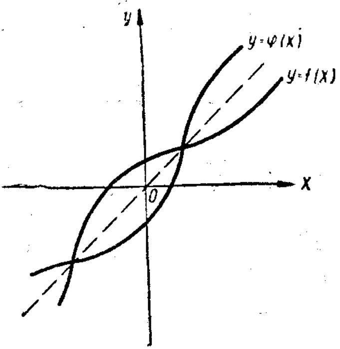


Рис. 56

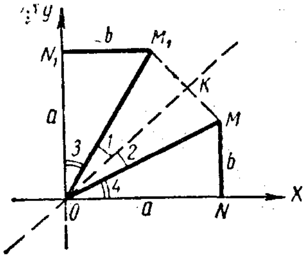


Рис. 57

Докажем, что график обратной функции $y=\varphi(x)$ симметричен с графиком функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 56).

Пусть при $x=a$, $y=f(a)=b$, точка $M(a, b)$ принадлежит графику прямой функции (рис. 57). Но тогда $a=$ $=\varphi(b)$ и точка $M(b, a)$ принадлежит графику обратной функции. Из равенства $\triangle ONM=\triangle ON_1M_1$ (по двум катетам) следует, что $OM=OM_1$ и $\angle OMM_1=\angle OM_1M$ (как углы при основании равнобедренного треугольника OMM_1). Биссектриса OK первого и третьего координатных углов является биссектрисой и угла MOM_1 ($\angle 1=45°-\angle 3$; $\angle 2=45°-\angle 4$, но $\angle 3=\angle 4$ как соответственные в равных треугольниках, следовательно, $\angle 1=\angle 2$), а биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является его осью симметрии. Следовательно, точки M и M_1 симметричны относительно биссектрисы OK.

Итак, каждой точке M на графике прямой функции соответствует точка M_1 на графике обратной функции, расположенная симметрично точке M относительно биссектрисы OK. Очевидно, верно и обратное, а потому наше утверждение можно считать доказанным. Отсюда следует:

Правило 6. *Для того чтобы построить график обратной функции, надо построить кривую, симметричную*

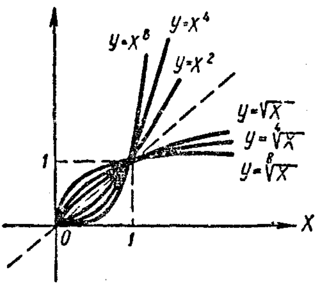


Рис. 58

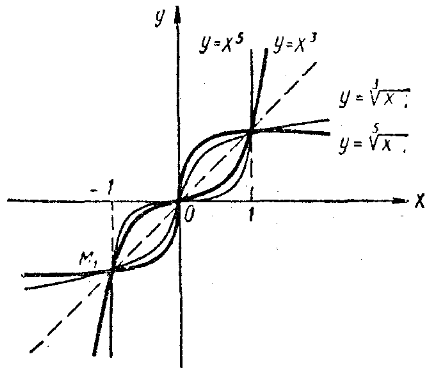


Рис. 59

графику прямой функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Таким образом, если известен график функции $y=f(x)$, то графики функций $y=-f(x)$ (правило 4), $y=f(-x)$ (правило 5) и обратной функции (правило 6) получаются зеркальным отражением графика функции $y=f(x)$ относительно оси Ox, оси Oy, биссектрисы первого и третьего координатных углов соответственно.

Пример. Рассмотрим графики простейших иррациональных функций вида $y=\sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число

Функция $y=\sqrt[n]{x}$ может рассматриваться как обратная по отношению к степенной функции $y=x^n$. Рассмотрим семейство кривых $y=x^n$ при четном n и при $x \geqslant 0$ (рис. 58).

Функцию $y=x^n$ (при четном n) рассматриваем только при $x \geqslant 0$ для того, чтобы она имела обратную функцию. Все эти кривые проходят через точки $O(0, 0)$ и $M(1, 1)$ и могут быть построены по точкам. Но тогда, построив кривые, симметричные графикам $y=x^n$ относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (по правилу 6), мы и получим графики функций: $y=\sqrt{x}$; $x=\sqrt[4]{x}$; $y=\sqrt[8]{x}$ и т. д. (см. рис. 58).

Рассмотрим теперь семейство кривых $y=x^n$ при нечетном n. Все эти функции нечетны и проходят через точки $O(0, 0)$, $M_1(-1, -1)$, $M_2(1, 1)$.

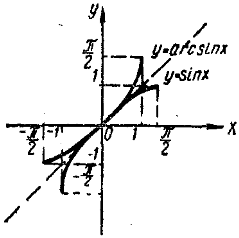


Рис. 60

На рис. 59 построены две такие кривые при $n=3$ и $n=5$. Графики обратных им функций построены на том же рисунке по правилу 6.

Выше указывалось, что функция $y=\sin x$ при $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеет обратную функцию $y=\arcsin x$. Для построения графика последней строим график прямой функции $y=\sin x$ на рассматриваемом интервале и по правилу 6 «отражаем» этот график «зеркально» относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. Построение дано на рис. 60. Аналогично строятся графики функций: $y=\arccos x$; $y=\operatorname{arc\,tg} x$; $y=\operatorname{arc\,ctg} x$. Эти графики показаны ранее.

Упражнения. 1. Построить на одном чертеже графики функций:

а) $y=2^x$ и $y=\log_2 x$;

б) $y=3x-1$ и $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$;

в) $y=x^3$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

Убедиться в том, что они симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

2. Зная аналитическое выражение прямой функции, составить выражение для обратной функции, заполнив табл. 19, построить график обратной функции.

№ п.п.	Прямая функция $y=f(x)$	Выражение x через y $x=\varphi(y)$	Обратная функция $y=\varphi(x)$
1	$y=\frac{1}{3}x-5$		
2	$y=x^5-1$		
3	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$		

§ 2. Построение графиков функций путем сдвига с деформациями

1. Построение графика функции $y=Af(x)$

Правило 7. *Для того чтобы построить график функции $y=Af(x)$, надо ординаты всех точек графика функции $y=f(x)$ увеличить по абсолютной величине в A раз, если $A>1$, и уменьшить в $\frac{1}{A}$ раз, если $0<A<1$ (иными словами, надо изменить ординаты всех точек графика функции $y=f(x)$ в отношении $1:A$).*

В самом деле, пусть график функции $y=f(x)$ известен (рис. 61) и $A>1$. В произвольной точке x_0 отрезок $CB=f(x_0)$, а $DB=Af(x_0)$, откуда $\frac{DB}{CB}=A$ (или $CB:DB=1:A$), т. е. ордината точки графика функции $y=Af(x)$ в точке x_0 в A раз больше соответствующей ординаты графика $y=f(x)$. Отсюда, в силу произвольности выбора точки x_0 (из области определения функции $y=f(x)$), и следует справедливость правила 7 для рассматриваемого случая. Аналогично убеждаемся в справедливости правила 7 при $0<A<1$.

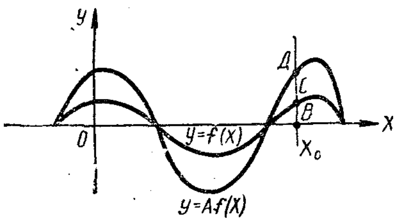


Рис. 61

На основании правила 7 можно установить, что переход от графика функции $y=f(x)$ к графику функции $y=Af(x)$ осуществляется с деформацией, а именно, при $A>1$ график функции $y=f(x)$ «растягивается», а при $0<A<1$ «сжимается» вдоль оси ординат. При этом нули функции, естественно, остаются на своих местах (все нули функции $y=f(x)$ являются нулями функции $y=Af(x)$ и наоборот).

Замечание. При отрицательном A для построения графика функции $y=Af(x)$ следует использовать два

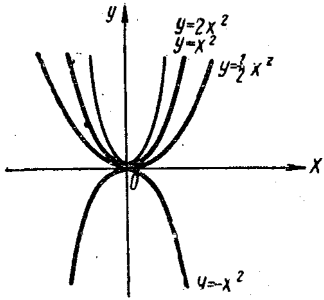


Рис. 62

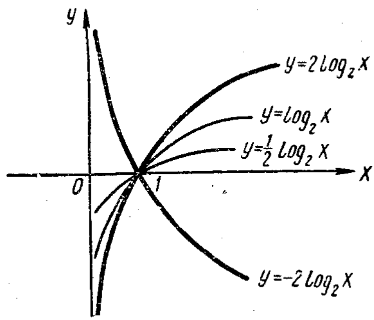


Рис. 63

правила: правило 7 — для построения функции $y_1=|A|f(x)$, а затем правило 4 — для построения графика $y=-y_1$.

Примеры.

1. Графики функций $y=ax^2$ представляют собой семейство парабол с общей вершиной в начале координат (общая нулевая точка). Несколько кривых из этого семейства показаны на рис. 62.

2. Графики функций $y=A\log_2 x$ представляют собой семейство логарифмических кривых, имеющих общую нулевую точку при $x=1$ и общую вертикальную асимптоту — ось ординат. Несколько кривых из этого семейства показаны на рис. 63.

3. Графики функций $y=A\sin x$ представляют собой семейство синусоидальных кривых с общими нулями $x=k\pi$ (рис. 64).

Упражнения. Построить графики функций путем «растяжения» или «сжатия» (а если надо — и с отражением) графика функции $y=f(x)$ вдоль оси ординат:

1. $y=\sqrt{x}$; **2.** $y=\cos x$; **3.** $y=2^x$;

$y=2\sqrt{x}$; $y=2\cos x$; $y=2\cdot 2^x$;

$y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$; $y=\frac{1}{2}\cos x$; $y=\frac{1}{2}\cdot 2^x$.

$y=-2\sqrt{x}$. $y=-2\cos x$;

Читателю предлагается самостоятельно решить, можно ли выполнить построение последних двух графиков путем сдвига графика $y=2^x$ без деформаций.

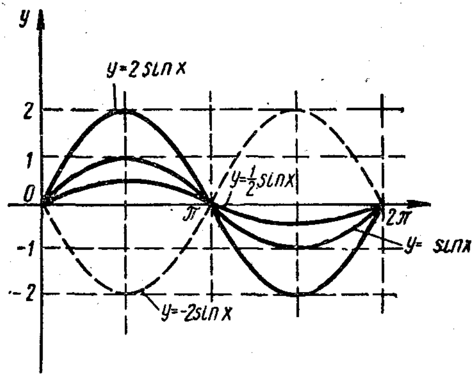


Рис. 64

2. Построение графика функции $y=f(\omega x)$

Правило 8. *Для того чтобы построить график функции* $y=f(\omega x)$ $(\omega>0)$, *надо абсциссы всех точек графика функции* $y=f(x)$ *уменьшить по абсолютной величине в* ω *раз, если* $\omega>1$, *и увеличить в* $\frac{1}{\omega}$ *раз, если* $0<\omega<1$ *(иными словами, надо изменить абсциссы всех точек графика функции* $y=f(x)$ *в отношении* $\omega:1$).

В самом деле, пусть график функции $y=f(x)$ известен (рис. 65) и $\omega>1$.

Возьмем произвольное значение аргумента x_0 (из области определения функции $y=f(x)$). Тогда отрезок $AB=f(x_0)$. Но функция $y=f(\omega x)$ принимает то же самое значение в точке D с абсциссой $\frac{x_0}{\omega}$, так как $y=f(\omega x)=$ $=f\left(\omega\frac{x_0}{\omega}\right)=f(x_0)$.

Таким образом, функция $y=f(\omega x)$ проходит все значения функции $y=f(x)$ (в силу произвольности выбора x_0) в точках, абсциссы которых по абсолютной величине в ω раз меньше соответствующих абсцисс функции $y=f(x)$.

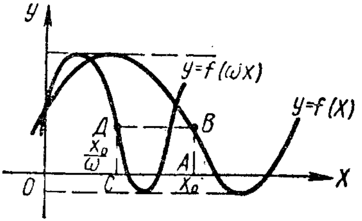


Рис. 65

В справедливости правила 8 при $0<\omega<1$ можно убедиться аналогично. Таким образом, переход от графика функции $y=f(x)$ к графику $y=f(\omega x)$ осуществляется деформацией графика $y=f(x)$ вдоль оси абсцисс (при $\omega>1$ график функции «сжимается» в ω раз, а при $0<\omega<1$ — «растягивается» в $\frac{1}{\omega}$ раз). При этом точки пересечения графика с осью ординат остаются на месте (так как при $x=0$ $\omega x=0$).

Замечание. При ω отрицательном ($\omega<0$) для построения графика функции $y=f(\omega x)$ следует использовать два правила: правило 8 — для построения графика функции $y=f(|\omega|x)$, а затем правило 5 — для построения графика $y=f(\omega x)=f(-|\omega|x)$.

Примеры.

1. Графики функций $y=\sin\omega x$ представляют собой семейство синусоид с различными периодами. На рис. 66 построены графики из этого семейства при $\omega=1, 2, \frac{1}{2}$, и — 2.

2. Графики функций $y=\arcsin\omega x$.

На рис. 67 построены кривые из этого семейства при $\omega=1, 2, \frac{1}{3}$ и —2.

3. Графики функций $y=\log_{\frac{1}{2}}\omega x$.

На рис. 68 построены кривые из этого семейства при $\omega=1, \frac{1}{2}$, 2 и —2.

Следует обратить внимание на то, что при $\omega>0$ все кривые семейства $y=\log_{\frac{1}{2}}\omega x$ могут быть построены по правилу 1, т. е. сдвигом логарифмической кривой $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ вдоль оси ординат, так как, например,

$$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\log_{\frac{1}{2}}x=1+\log_{\frac{1}{2}}x.$$

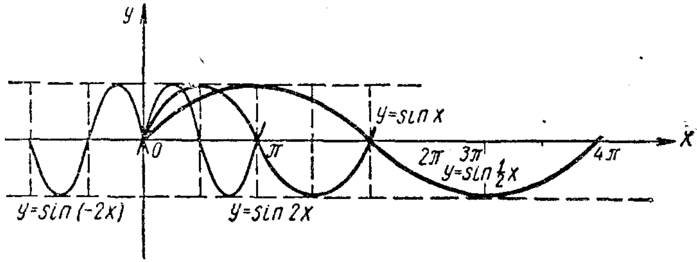


Рис. 66

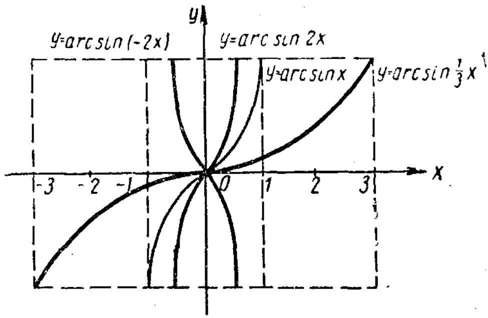


Рис. 67

Из последнего выражения видно, что для получения графика функции

$$y=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x\right)$$

надо график

$$y=\log_{\frac{1}{2}}x$$

сдвинуть без деформации вверх на единицу.

В общем виде при $\omega > 0$

$$y = \log_{\frac{1}{2}} (\omega x) = \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} \omega = \log_{\frac{1}{2}} x + c,$$

где

$$c = \log_{\frac{1}{2}} \omega = \text{const}.$$

Упражнения. Методом деформации графика первой функции в направлении оси абсцисс построить графики функций:

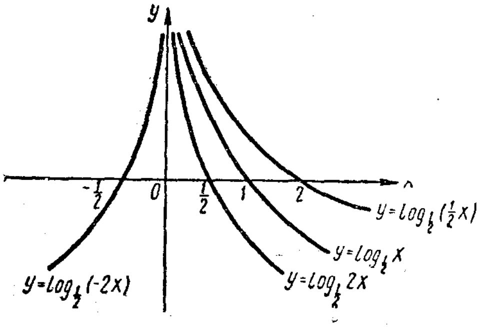


Рис. 68

1. $y = \cos x$;	2. $y = \log_2 x$;	3. $y = \operatorname{tg} x$;
$y = \cos 2x$;	$y = \log_2 2x$;	$y = \operatorname{tg} (2x)$;
$y = \cos\left(\frac{1}{2} x\right)$;	$y = \log_2 \left(\frac{1}{2} x\right)$;	$y = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2} x\right)$;
$y = \cos(-2x)$.	$y = \log_2 (-2x)$.	$y = \operatorname{tg}(-2x)$

При построении графиков функций $y = Af(x)$ и $y = f(\omega x)$ по правилам 7 и 8 следует производить деформацию графика либо в направлении оси ординат, либо в направлении оси абсцисс. Эти два правила можно теперь объединить и сформулировать правило 9, являющееся их следствием.

3. Построение графика функции $y = Af(\omega x)$

Правило 9. *Для того чтобы построить график функции* $y = Af(\omega x)$, *где* $A > 0$ и $\omega > 0$, *надо ординаты всех* *точек графика функции $y=f(x)$ изменить в отношении $1:A$, а абсциссы всех точек полученного графика изменить в отношении* $\omega:1$. В этой формулировке, для сокращения, не рассматриваются случаи: $A>1$; $A<1$; $\omega>1$; $\omega<1$. Все эти случаи объединены словами: «изменить в отношении $1:A$» и «изменить в отношении $\omega:1$».

Пример. Построить график функции $y=2\sin 2x$.

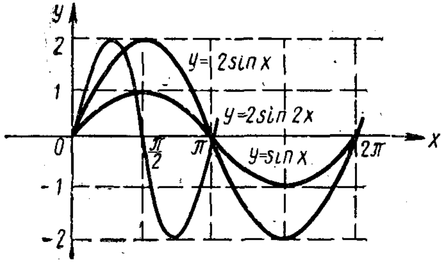


Рис. 69

Строим график функции $y=\sin x$ (рис. 69). Удвоив все ординаты, получаем график функции $y=2\sin x$. «Сжав» полученный график вдоль оси абсцисс вдвое (уменьшаем вдвое абсциссы соответствующих точек), получаем график функции $y=2\sin 2x$. Очевидно, что порядок выполнения деформаций можно было бы и изменить. Читатель без труда убедится в том, что если сначала построить график функции $y=\sin 2x$, а потом график функции $y=2\sin 2x$ (т. е. если сначала произвести «сжатие» вдоль оси абсцисс, а потом «растяжение» вдоль оси ординат), то получится та же самая кривая, что и на рис. 69.

Упражнение. Построить график функции $y=2\cos 2x$ (см. правило 9) двумя способами (меняя порядок выполнения деформаций функции $y=\cos x$) и убедиться в том, что получается один и тот же график.

Для построения графика функции $y=f(x+n)+m$ (правило 3) мы, объединив правила 1 и 2, сдвигали график функции $y=f(x)$ (вдоль осей координат) без деформаций.

Для построения графика функции $y=Af(\omega x)$ (правило 9) мы, объединив правила 7 и 8, производили деформации графика функции $y=f(x)$ (в направлении осей координат) без сдвига.

Вполне естественно, что во многих случаях построение нужного графика нельзя осуществить только сдвигами или только деформациями графика функции $y=f(x)$. Приходится производить и сдвиги и деформации, последовательно используя те или иные правила, установленные в § 1 и 2 настоящей главы (правила 1—9).

Все эти правила (за исключением правила 6) можно объединить в одно правило 10, являющееся их следствием.

4. Построение графика функции $y=Af(\omega x+n)+m$

Правило 10. *Для того чтобы построить график функции* $y=Af(\omega x+n)+m=Af\left[\omega\left(x+\frac{n}{\omega}\right)\right]+m$, *надо:*

1) *Ординаты всех точек графика функции* $y=f(x)$ *изменить в отношении* $1:A$. *При этом производится деформация в направлении оси ординат (а при* $A<0$ *и отражение относительно оси абсцисс).*

2) *Абсциссы всех точек полученного графика изменить в отношении* $\omega:1$. *При этом производится деформация в направлении оси абсцисс (а при* $\omega<0$ *и отражение относительно оси ординат).*

3) *Сдвинуть полученный график вдоль оси абсцисс на* $-\frac{n}{\omega}$.

4) *Сдвинуть полученный график вдоль оси ординат на* m.

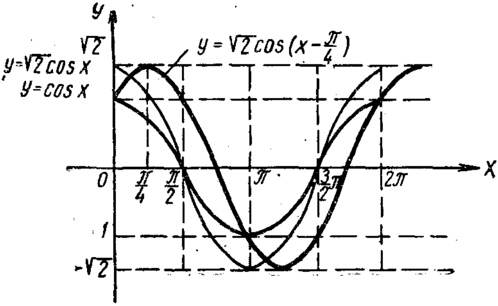


Рис. 70

Данное правило раскрывает «динамику» построения графика заданной функции. Кроме того, это правило объединяет все предыдущие (кроме правила 6), и если принять его за основу, то правила 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9 получаются из него как частные случаи при тех или иных значениях параметров: A, ω, m и n.

Например, правило 3 является следствием правила 10 при $A=\omega=1$ и произвольных m и n; правило 5 — при $A=1$, $m=n=0$, $\omega=-1$; правило 8 — при $A=1$, $m=n=0$ и произвольном ω и т. д.

Примеры.

1. Построение графика функции $y=\sin x+$ $+\cos x$.

Очевидно

$$y=\sin x+\cos x=$$
$$=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right).$$

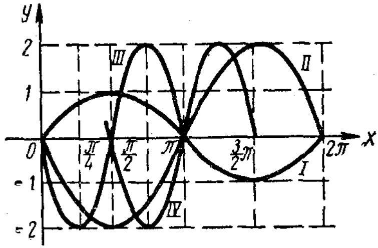


Рис. 71

Поэтому можно построить этот график сдвигом с деформацией графика $y=\cos x$ по правилу 10, что и выполнено на рис. 70, где последовательно построены графики функций $y=\cos x$, $y=\sqrt{2}\cos x$ («растяжение» вдоль оси ординат в $\sqrt{2}$ раз) и $y=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\left(\text{сдвиг в направлении оси абсцисс на } +\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Построение графика функции $y=-2\sin(2x-3)$.

Запишем выражение для y в виде

$$y=-2\sin 2\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

(это нужно для того, чтобы правильно определить величину сдвига вдоль оси абсцисс после деформаций). Строим график функции $y=\sin x$ (I на рис. 71). Умножив все ординаты на $A=-2$, получаем график функции $y=-2\sin x$ (II на рис. 71). «Сжав» график II вдоль оси абсцисс вдвое, получаем график функции $y=-2\sin 2x$ (III на рис. 71). После этого остается только произвести сдвиг графика III на $\frac{3}{2}$ вдоль оси абсцисс. График заданной функции построен на рис. 71—IV.

Следует иметь в виду, что все построения надо выполнять в одном масштабе. При этом необходимо учитывать, что $\frac{\pi}{2} \approx \frac{3,14}{2} = 1,57 \approx \frac{3}{2}$, что и учтено при построении графика *IV* на рис, 71.

Упражнения. Построить графики следующих функций деформацией и сдвигом графика соответствующей функции:

1. $y = 2\cos(2x + 3)$;
2. $y = \frac{3}{2}\sin(3x + 3)$.
3. $y = -\frac{3}{4}\sin(2x - 2)$.
4. $y = 2\sin(3 - 2x)$.
5. $y = \frac{1}{2}\arcsin(3x - 1)$.
6. $y = -\frac{1}{3}\arcsin(3 - 2x)$.

Рассмотренные в настоящем пункте примеры и рекомендованные упражнения относятся к графикам простых гармонических колебаний. Краткое знакомство с ними весьма полезно в связи с их широким распространением в физике и технике, а также и потому, что позволяет существенно упростить построение указанных графиков.

5. Построение графиков простых гармонических колебаний

Предположим, что точка M (рис. 72) движется равномерно с постоянной угловой скоростью ω (*рад/сек*) против часовой стрелки по окружности радиуса O_1M центром в точке O_1. Пусть в начальный момент времени, т. е. при $t=0$, движущаяся точка находилась в точке M_{12}, положение которой определяется углом φ. Тогда через t *сек* точка перейдет в положение M, определяемое углом $\theta = \omega t + \varphi$.

Рассмотрим, как перемещается проекция точки M на вертикальный диаметр O_1K при равномерном вращении точки M. Из $\triangle O_1MK$ очевидно, что $O_1K = O_1M\sin\theta$ или $y = A\sin(\omega t + \varphi)$. Это уравнение и определяет закон, по которому совершает колебательное движение проекция K точки M на вертикальный диаметр. Такого рода движение точки K называется *простым гармоническим колебанием.*

Из выражения $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ ясно (если учесть к тому же, что $\cos\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, что рассмотренные в пункте 4 примеры относятся к простым гармоническим колебаниям).

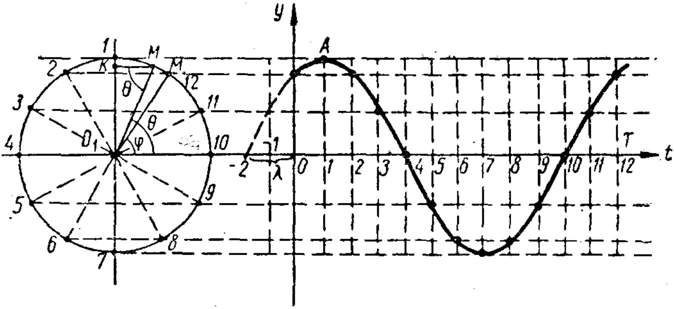


Рис. 72

На рис. 72 построение графика функции $y=A\sin(\omega t+\varphi)$ произведено следующим образом: окружность, по которой движется точка M, разделена на 12 равных частей; на оси Ot отложен произвольный отрезок OT, соответствующий полному циклу колебаний точки K. Этот отрезок разделен на 12 равных частей. Через точки деления проведены прямые, перпендикулярные оси Ox, и на них отложены отрезки, равные ординатам соответствующих точек окружности. Соединяя полученные точки плавной кривой, получаем одну «волну» (один период) функции $y=A\sin(\omega x+\varphi)$. Такой способ построения данного графика дает возможность уяснить геометрический смысл параметров простого гармонического колебания: A, ω и φ.

Величина A — радиус круга — является наибольшим отклонением точки K от центрального положения O_1 и называется *амплитудой колебания.*

Переменный угол $\theta=\omega t+\varphi$, определяющий текущее положение точки M, называют *фазой*, а угол φ, определяющий начальное положение точки M_{12}, — *начальной фазой.*

Время T, в течение которого точка M совершит полный оборот, а точка K — полный цикл колебания, называют *периодом гармонического колебания.* Очевидно, T — период функции $y=A\sin(\omega t+\varphi)$, ω — угловая скорость вращения точки M (ее называют угловой частотой).

Известно, что $\omega T=2\pi$, откуда

$$T=\frac{2\pi}{\omega},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.$$

Величина, обратная периоду колебания, т. е. $\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$, называется *частотой* (она показывает, сколько колебаний в секунду совершает точка K).

Что же надо знать для построения графика функции

$$y=A\sin(\omega t+\varphi)=A\sin\omega\left(t+\frac{\varphi}{\omega}\right)$$

непосредственно? Надо знать величину амплитуды A (чтобы определить «высоту» графика); величину ω, по которой находится $T=\frac{2\pi}{\omega}$ (для построения удобнее искать сразу четверть периода $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}$; чтобы определить, насколько сдвинута заданная синусоида относительно графика $y=A\sin\omega t$, нужно знать величину

$$\lambda=-\frac{\varphi}{\omega};$$

на рис. 72 $\lambda=-2$). Точка на оси t с координатой λ соответствует $\left(y=A\sin\omega\left(\lambda+\frac{\varphi}{\omega}\right)=A\sin 0=0\right)$ положению точки M в правом конце горизонтального диаметра (на рис. 72 точка 10). Отсюда и метод построения: *из формулы колебания определяем A и проводим две прямые $y=\pm A$* (между ними будет заключен весь график); *определяем $\lambda=-\frac{\varphi}{\omega}$ и отмечаем на оси абсцисс точку $t=\lambda$* (с этой точки начинается положительный полупериод синусоиды); *определяем* $\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2\omega}$

и откладываем от точки $t=\lambda$ на оси абсцисс четыре таких отрезка, после чего построение графика очевидно.

Пример. Построить график функции

$$y = 2\sin(2x - 3).$$

Здесь $A=2$, $\omega=2$, $\varphi_0=-3$ и потому

$$\lambda = -\frac{\varphi_0}{\omega} = \frac{3}{2}, \text{ а } \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{4}.$$

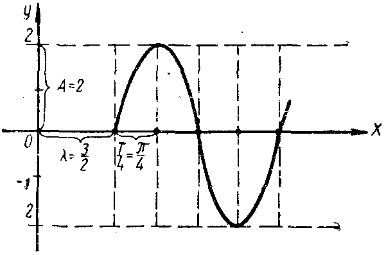


Рис. 73

Построение выполнено (рис. 73) на интервале, длина которого равна одному периоду (далее, в обе стороны, график периодически повторяется).

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y = 5\cos(5x + 6)$. 3. $y = -\frac{3}{4}\sin(2x - 2)$.

2. $y = \frac{5}{4}\sin(5x + 5)$. 4. $y = 5\sin(6 - 5x)$.

§ 3. Построение графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля

Напомним, что под *абсолютной величиной* (*модулем*) вещественного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Например: $|5| = 5$ и $|-5| = 5$ (числа 5 и -5 по абсолютной величине одинаковы).

1. Построение графика функции $y=|f(x)|$

Правило 11. *Для того чтобы построить график функции $y=|f(x)|$, надо оставить без изменения те участки графика $y=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$, и построить изображения, симметричные графику функции $y=f(x)$ относительно оси абсцисс на тех участках, где $f(x)<0$ (вместо графика $y=f(x)$ на этих участках)* *.

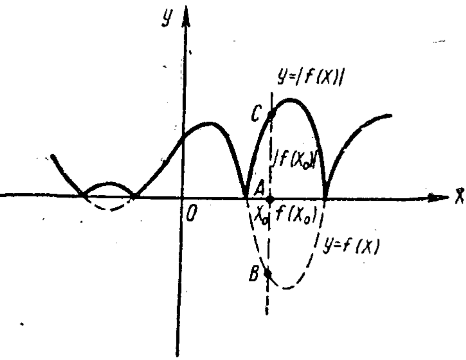


Рис. 74

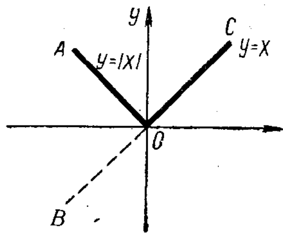


Рис. 75

В самом деле, по определению модуля (абсолютной величины) в любой точке, где $f(x)\geqslant 0$, $|f(x)|=f(x)$ и графики функций $y=f(x)$ и $y=|f(x)|$ во всех таких точках просто совпадают.

Возьмем произвольную точку x_0, в которой $f(x_0)<0$ (рис. 74, $f(x_0)=AB$; $|f(x_0)|=-f(x_0)=AC$). Длина отрезка AC равна длине AB, но направлен он вверх по оси ординат: точка C симметрична точке B относительно оси абсцисс, и в силу произвольности выбора точки x_0 правило 11 доказано.

Примеры.

1. Построить график функции $y=|x|$.

Строим график функции $y=x$ (рис. 75). При $x\geqslant 0$ $y=|x|=x$ и график остается без изменения; при $x<0$, $|x|=-x$ строим полупрямую OA, симметричную полупрямой OB, относительно оси абсцисс. Таким образом, графиком функции $y=|x|$ является ломаная линия AOC.

---

* В дальнейшем для сокращения записи будем считать, что функция $y=f(x)$ рассматривается только в области ее определения.

2. Построить график функции $y=|x+2|$.

После построения графика функции $y=|x|$ применяем правило 2: сдвигаем график функции $y=|x|$ на две единицы влево и получаем график функции $y=|x+2|$. Тот же график можно получить, построив график функции $y=x+2$ и применив правило 11 (рис. 76).

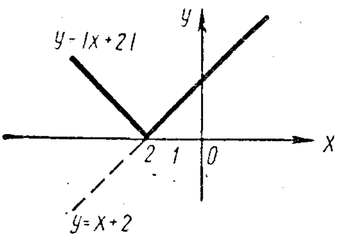


Рис. 76

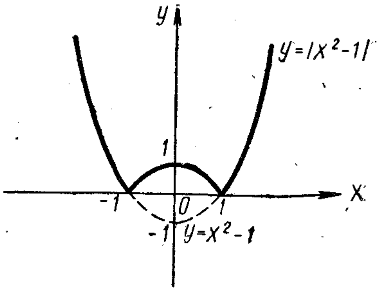


Рис. 77

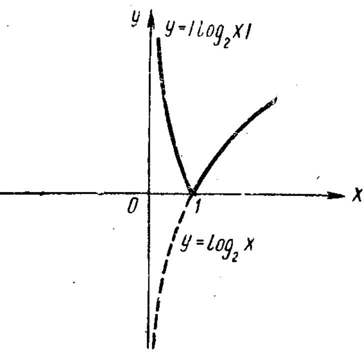


Рис. 78

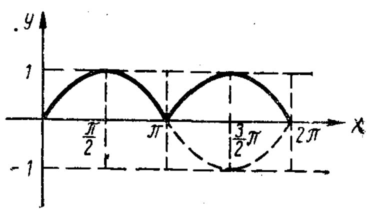


Рис. 79

3. Построить график функции $y=|x^2-1|$.

Строим график функции $y=x^2-1$, сдвигая по правилу 1 на одно деление масштаба вниз параболу $y=x^2$. Затем строим на интервале $(-1;\ +1)$ изображение, симметричное графику $y=x^2-1$ относительно оси абсцисс (по правилу 11), а остальную часть графика оставляем неизменной (рис. 77).

4. Построить график функции $y=|\log_2 x|$.

Строим график функции $y=\log_2 x$ (рис. 78) и по правилу 11 там, где $y<0$, т. е. на интервале (0, 1) (вместо графика $y=\log_2 x$) строим изображение, симметричное графику $y=\log_2 x$ относительно оси абсцисс.

5. Построить график функции $y=|\sin x|$.

После разобранных примеров построение данного графика очевидно и выполнено на рис. 79 (отрицательная полуволна синусоиды «отразилась» относительно оси абсцисс).

Упражнения. Применяя правило 11 (а где нужно, и другие) построить графики функций:

1. $y=|x-1|$.
2. $y=|x^2-6x+5|$.
3. $y=|2\sin 2x|$.
4. $y=|\log_2(x-1)|$.
5. $y=|2^x-2|$.
6. $y=|\arcsin x|$.

2. Построение графиков функции $y=f(|x|)$

Правило 12. *Для того чтобы построить график функции $y=f(|x|)$ надо: во-первых, построить график функции $y=f(x)$ при $x\geqslant 0$, во-вторых, при $x<0$ достроить график симметрично полученному графику относительно оси ординат.*

В самом деле, при $x\geqslant 0$ по определению модуля $|x|=x$, и потому $f(|x|)=f(x)$. Это значит, что при $x\geqslant 0$ график функции $y=f(x)$ является и графиком функции $y=f(|x|)$.

Вторая часть правила 12 становится очевидной, как только мы заметим, что функция $y=f(|x|)$ является четной, так как $f(|-x|)=f(|x|)$. Поэтому ее график симметричен относительно его ординат. Обратим еще раз внимание на то, что вид графика функции $y=f(x)$ при отрицательных x для построения графика $y=f(|x|)$ не имеет никакого значения! Больше того, функция $y=f(x)$ может при отрицательных x и не существовать (например, $y=\log_2 x$), а функция $y=f(|x|)$ существует обязательно в симметричной относительно начала координат области.

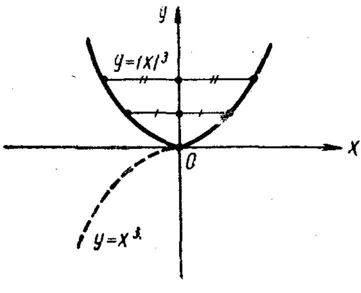


Рис. 80

Примеры.

1. Построить график функции $y=|x|^3$.

При $x \geqslant 0$ график функции $y=|x|^3$ совпадает с графиком функции $y=x^3$ (рис. 80), а при $x<0$ график будет симметричен графику функции $y=x^3$ при $x \geqslant 0$ — относительно оси ординат.

2. Построить график функции $y=|x-1|^3$.

Этот график (рис. 81) легко получается из графика функции $y=|x|^3$ сдвигом вдоль оси абсцисс на $+1$ единицу масштаба (по правилу 2). Может показаться, что

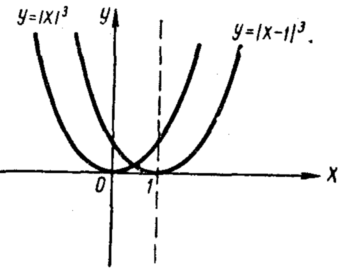


Рис. 81

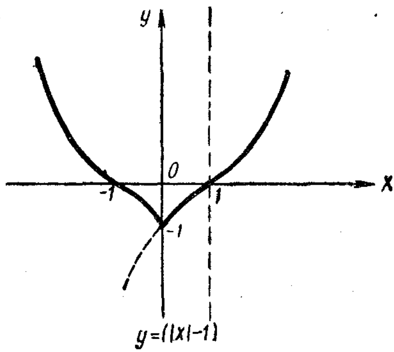


Рис. 82

график функции $y=|x-1|^3$ можно получить, построив сначала (по правилу 2) график $y=(x-1)^3$, а затем — применив правило 12, но тогда получается совершенно другой график, построенный на рис. 81. В чем же дело?

Правило 12 говорит о построении графика $y=f(|x|)$, а не графика $y=f(|x-1|)$. На рис. 82 фактически получен график функции $y=(|x|-1)^3$, а не график $y=$ $=|x-1|^3$, который требовалось построить. Вот почему для получения искомого графика надо сначала построить график $y=f(|x|)$, а потом уже сдвигать его по правилу 2.

3. Построить график функции $y=\sin|x|$.

Строим график функции $y=\sin x$ (рис. 83) и по правилу 12 при $x \geqslant 0$ оставляем его без изменения, а при $x<0$ строим изображение, симметричное той части графика, которая получена при $x \geqslant 0$ относительно оси ординат.

4. Построить график функции $y=x^2-5|x|+6$.

Строим параболу $y=x^2-5x+6$; имея в виду, что $x^2=|x|^2$, строим искомый график как график функции $y=f(|x|)$ по правилу 12, что и выполнено на рис. 84.

5. Построить график функции $y=\log_2|x|$.

Строим график функции $y=\log_2 x$ (рис. 85). Подчеркнем еще раз, что эта функция существует только при положительных значениях x. График функции $y=\log_2|x|$ (по правилу 12) получается добавлением к графику функции $y=\log_2 x$ его зеркального отражения относи-

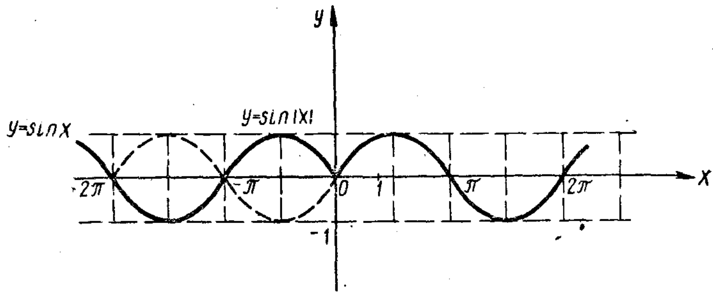


Рис. 83

тельно оси ординат. График функции $y=\log_2|x|$ состоит, таким образом, из двух ветвей, симметричных относительно оси Oy. Функция $y=\log_2|x|$ существует на всей числовой оси, за исключением одной точки $x=0$.

Упражнения. Применяя правило 12 (а где нужно, и другие), построить графики функций:

1. $y=|x+2|^3$; **2.** $y=\sin|x-1|$.

3. $y=x^2-6|x|+5$. **4.** $y=\log_2|x-1|$.

5. $\log_{\frac{1}{2}}|x|$. **6.** $\log_{\frac{1}{2}}|x+1|$.

Могут встретиться случаи, когда правила 11 и 12 придется использовать совместно.

3. Построение графиков функций $y=|f(|x|)|$.

Примеры.

1. Построить график функций $y=|x^2-5|x|+6|$.

На рис. 84 был уже построен график $y=x^2-5|x|+6=f(|x|)$; остается теперь построить график модуля этой функции, что и выполнено на рис. 86.

2. Построить график функции $y=|\log_2|x||$.

На рис. 85 построен график функции $y=\log_2|x|$. Для получения графика заданной функции надо там, где $\log_2|x|<0$ «отразить» график (как в зеркале) относительно оси Ox, что и выполнено на рис. 87. Можно изменить порядок «отражения»: сначала построить график $y=|\log_2 x|$ (см. рис. 78), а затем «отразить» его относительно оси Oy.

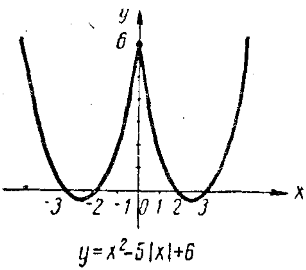


Рис. 84

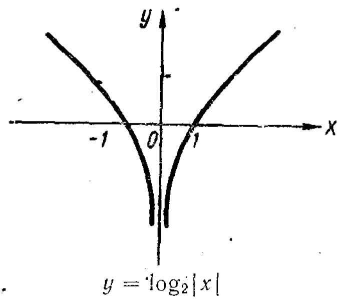


Рис. 85

3. Построить график функции $y=|\log_2|x-1||$. Этот график получается сдвигом графика функции $y=|\log_2|x||$ (построенного на рис. 87) на одну единицу вправо (по правилу 2), что и выполнено на рис. 88.

4. Построить график функции $y=|\log_2(|x|-1)|$.

Строим график функции $y=\log_2 x$: по правилу 2 строим график функции $y=\log_2(x-1)$ (сдвиг вправо на единицу); по правилу 11 строим график функции $y=|\log_2(x-1)|$, а затем по правилу 12 строим изображение, симметричное построенному графику относительно оси ординат. График состоит из двух симметричных ветвей (см. рис. 89). Заметим, что в интервале $[-1, +1]$ график не проходит, этот интервал не входит в область определения

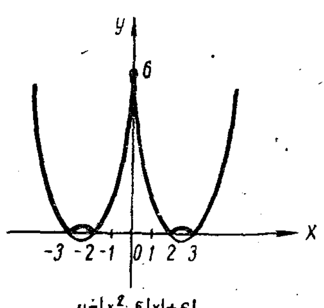


Рис. 86

функции, что вполне естественно, так как при $|x| \leqslant \leqslant 1$ $|x|-1 \leqslant 0$ и $\log_2(|x|-1)$ не существует.

5. Построить график функции $y=|\log_2||x|-1||$.

В отличие от функции $y=|\log_2(|x|-1)|$ заданная функция определена и в интервале $(-1, +1)$. Вне этого

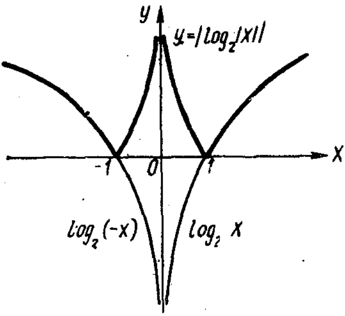


Рис. 87

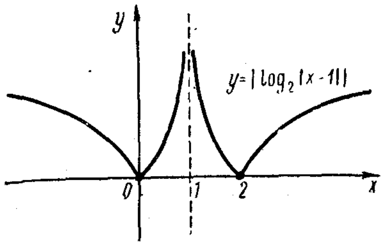


Рис. 88

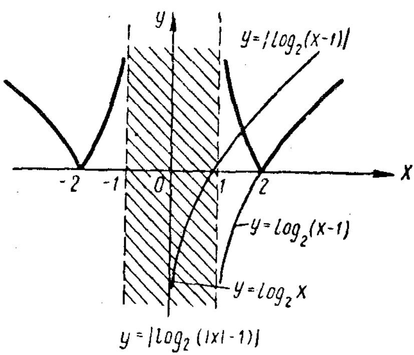
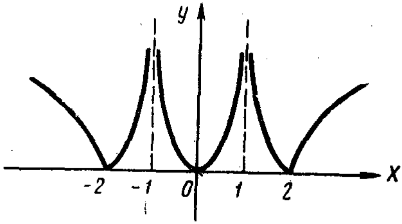


Рис. 89

интервала $|x|>1$, $|x|-1>0$ и $||x|-1|=|x|-1$, а потому график заданной функции совпадает с графиком, построенным на рис. 89. Внутри же этого интервала $|x|<1$, $|x|-1<0$ и $||x|-1|=1-|x|$.

Заметим, что $1-|x|$ при возрастании x от 0 до 1 убывает от 1 до 0, а $|x|-1$ при возрастании x от 1 до 2 возрастает от 0 до 1, а потому график заданной функции на этих интервалах проходит симметрично относительно прямой $x=1$. Построение выполнено на рис. 90 (на интервале $(-1, 0)$ график строится симметрично относительно оси ординат).



$y=|\log_2||x|-1||$

Рис. 90

Упражнения. На одном рисунке, последовательно применяя соответствующие правила, построить графики функций:

1. $y=\log_2(x-2)$;
$y=|\log_2(x-2)|$;
$y=\log_2|x-2|$;
$y=|\log_2|x-2||$.

2. $y=\log_2(x-2)$;
$y=\log_2(|x|-2)$;
$y=\log_2||x|-2|$;
$y=|\log_2||x|-2||$.

3. $y=x^2-6x+8$;
$y=x^2-6|x|+8$;
$y=|x^2-6|x|+8|$.

§ 4. «Алгебра графиков»

В гл. 1, § 4 было указано, что элементарные функции строятся из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции. Графики основных элементарных функций известны. Поэтому построить графики сложных функций можно путем выполнения указанных операций над графиками основных элементарных функций (понимая под этим выполнение указанных алгебраических операций над соответствующими координатами); отсюда и название данного параграфа — «Алгебра графиков».

С этой точки зрения, например, построение графика функции $y=f(x)+a$ (правило 1) можно рассматривать как сложение графиков $y_1=f(x)$ и $y_2=a$; построение графика функции $y=ax^2$ — как умножение графиков $y_1=x^2$ и $y_2=a$; построение графика квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ — как сложение графиков (параболы $y_1=ax^2$ и прямой $y_2=bx+c$ *).

Однако все эти графики были построены нами без «алгебры графиков». Тем не менее существует большое количество элементарных функций, построение графиков которых без «алгебры графиков» крайне затруднительно, а иногда и невозможно. Вот почему целесообразно, не рассматривая данного вопроса подробно, хотя бы на некоторых примерах показать методику применения «алгебры графиков».

1. Построение графиков функций вида $y=f(x)\pm\varphi(x)$

Из сказанного ранее известно, что для построения графика функции $y=f(x)\pm\varphi(x)$, если известны графики функции $y_1=f(x)$ и $y_2=\varphi(x)$, надо произвести алгебраическое сложение соответствующих ординат $y=y_1\pm y_2$. Применение такого способа целесообразно, например, когда слагаемые являются основными элементарными функциями разных типов.

Примеры.

1. Построить график функции $y=x+\sin x$.

Строим графики функции $y_1=x$ и $y_2=\sin x$ и получаем график заданной функции путем сложения соответствующих ординат:

$$y=y_1+y_2.$$

При построении следует обратить внимание на два обстоятельства:

1) $|\sin x|\leqslant 1$, а потому имеет смысл провести через точки $(0, 1)$ и $(0, -1)$ прямые $y=x+1$ и $y=x-1$, параллельные прямой $y=x$, между этими двумя прямыми и располагается график функции $y=y_1+y_2$.

2) В тех точках, где $y_2=0$ (т. е. при $x=k\pi$, где $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), $y=y_1$, а это означает, что соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y_1=x$.

* Подробно см.: Шилов Г. Е. «Как строить графики?» Физматгиз, 1959.

В тех случаях, где $\sin x = -1$ $\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $y = y_1 - 1$, а это значит, что соответствующие точки графика лежат на прямой $y = x - 1$.

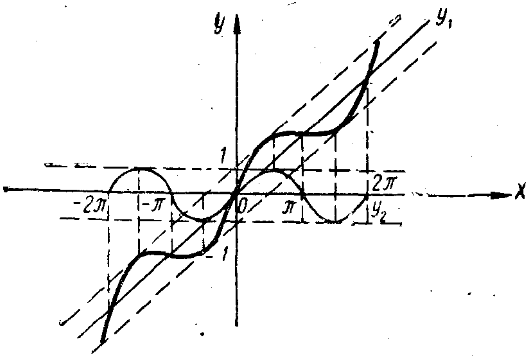


Рис. 91

После этих замечаний построение графика затруднений не вызывает (рис. 91).

2. Построить график функции $y = |\sin x| + |\log_{\frac{1}{2}} x|$.

Так как $\log_{\frac{1}{2}} x$ существует лишь при $x > 0$ ($\sin x$ существует на всей числовой оси), то областью существования для заданной функции является открытый бесконечный интервал $(0, \infty)$. Заштрихуем левую полуплоскость. Здесь график заданной функции отсутствует.

Так как модули не могут быть отрицательными, то и $y \geqslant 0$. Заштриховываем нижнюю полуплоскость. Строим графики $y_1 = |\sin x|$ и $y_2 = |\log_{\frac{1}{2}} x|$ только при $x > 0$ (по ранее установленным правилам) и производим сложение графиков: $y = y_1 + y_2$. При этом обращаем внимание на то, что $y_2 = 0$ только в одной точке $x = 1$ (в этой точке $y = y_1$, а $y_1 = 0$ в точках $x = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$); в этих точках $y = y_2$.

Наибольшее значение $|\sin x| = 1$ достигается в точках $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). В этих точках $y = y_2 + 1$. Построение выполнено на рис. 92.

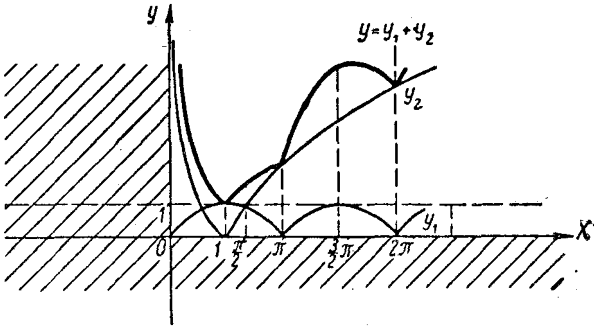


Рис. 92

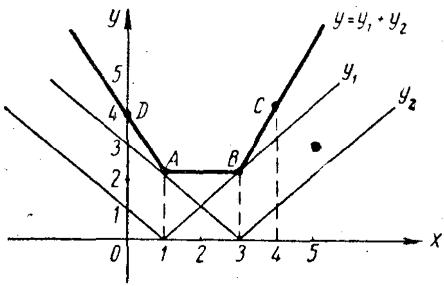


Рис. 93

3. Построить график функции $y = |x-1| + |x-3|$.

Строим графики функций $y_1 = |x-1|$ и $y_2 = |x-3|$ (рис. 93).

Напомним, что по определению модуля

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{при } x-1 \geqslant 0, \text{ т. е. при } x \geqslant 1; \\ -(x-1), & \text{при } x-1 < 0, \text{ т. е. при } x < 1. \end{cases}$$

Но уравнения $y_1 = x-1$ и $y_1 = -(x-1)$ так же, как

$y_2=x-3$ и $y_2=-(x-3)$, есть уравнения первой степени. Очевидно, что при сложении двух уравнений первой степени получится снова уравнение первой степени, т. е. уравнение прямой линии, но так как для построения прямой достаточно найти любые две ее точки, то:

при $x=1$

$y_1=0$, а потому $y=y_2=2$ (точка A);

при $x=3$

$y_2=0$, а потому $y=y_1=2$ (точка B);

при $x=4$

$y_1=3$, $y_2=1$, а потому $y=4$ (точка C);

при $x=0$

$y_1=1$, $y_2=3$, а потому $y=4$ (точка D).

Соединив полученные точки, получим ломаную $DABC$, которая и является графиком заданной функции.

Обычно такой график строят по участкам с тем, чтобы получить выражения для y без модулей:

1) при $x<1$ $(x-1)<0$ и $(x-3)<0$;

$$y=|x-1|+|x-3|=-(x-1)-(x-3)=-2x+4;$$

2) при $1\leqslant x<3$ $(x-1)\geqslant 0$, $(x-3)<0$;

$$y=|x-1|+|x-3|=x-1-(x-3)=2 \quad (\text{участок } AB);$$

3) при $x\geqslant 3$ $(x-1)>0$, $(x-3)\geqslant 0$;

$$y=|x-|+|x-3|=x-1+x-3=2x-4.$$

Построение методом сложения графиков явно проще.

Упражнения. Методом сложения построить графики функций:

1. $y=x+\cos x$.

2. $y=x-\sin x$. (Указание: принять $y_2=-\sin x$).

3. $y=|\log_{\frac{1}{3}} x|+\sin x$.

4. $y=x+2^x$.

5. $y=|x+1|+|x-1|$.

2. Построение графиков функций вида $y=f(x)\varphi(x)$

Очевидно, что для нахождения ординат y надо перемножить соответствующие ординаты функций $y_1=f(x)$ и $y_2=\varphi(x)$.

Применение этого метода целесообразно, когда сомножителями являются основные элементарные функции разных типов.

Примеры.

1. Построить график функции $y=x\sin x$.

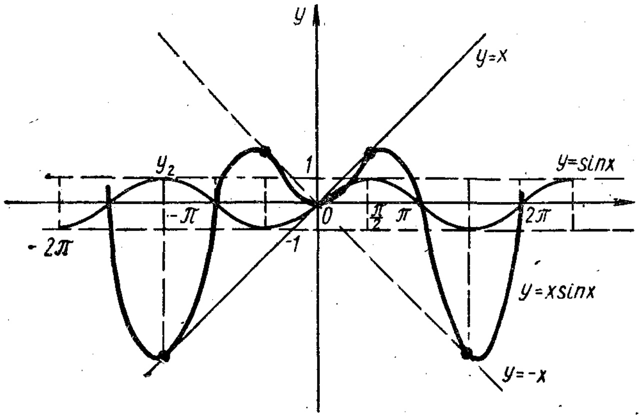


Рис. 94

Строим графики функций $y_1=x$ и $y_2=\sin x$. График заданной функции $y=x\sin x$ получаем умножением соответствующих ординат: $y=y_1y_2$. Построение производим при $x\geqslant 0$, а затем отражаем полученный график относительно оси ординат, так как $y=x\sin x$ является четной функцией. При этом учитываем, что в точках с координатами $x=k\pi$, $y_2=0$ произведение $y=y_1y_2=0$. Наибольшее значение функции $y_2=\sin x$ равно 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$. В этих точках $y=y_1\cdot 1=y_1=x$, и соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y=x$. Наименьшее значение функции $y_2=\sin x$ равно -1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$. В этих точках $y=y_1(-1)=$ $=-y_1=-x$, и соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y=-x$. Очевидно, график колеблется между прямыми $y=x$ и $y=-x$ (рис. 94).

2. Построить график функции $y=x|x|$.

Строим графики $y_1=x$ и $y_2=|x|$ и производим умножение соответствующих ординат. При $x \geqslant 0$, $y_2=y_1=x$, $y=x^2$ (половина параболы). При $x<0$, $y_2=-y_1=-x$,

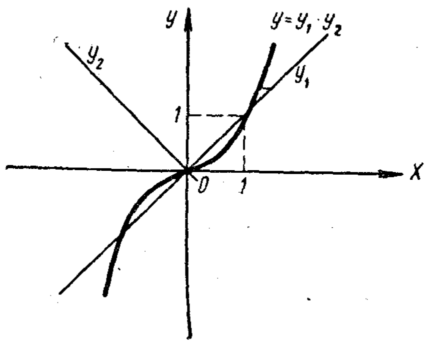


Рис. 95

$y=-x^2$. В итоге получим кривую, симметричную относительно начала координат, что вполне естественно в силу нечетности функции $y=x|x|$. Построение выполнено на рис. 95.

Упражнения. Методом умножения построить графики функций:

1. $y=x|\sin x|$.
2. $y=x \arccos x$.

3. Построение графиков функций вида $y=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$

Очевидно, что для нахождения ординат y надо разделить соответствующие значения $y_1=f(x)$ на $y_2=\varphi(x)$ (в точках, где $\varphi(x) \neq 0$). Частным случаем такого вида функций являются функции $y=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ (здесь $f(x)=1$).

Примеры.

1. Построить график функции $y=\operatorname{cosec} x=\dfrac{1}{\sin x}$.

В силу периодичности функции $y_1=\sin x$ периодической будет и функция $y=\dfrac{1}{y_1}$. Поэтому график построим лишь на одном из периодов: $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Естественно, что нули функции $y_1=\sin x$ на рассматриваемом интервале ($x=0$; $x=\pi$; $x=2\pi$) являются точками бесконечного разрыва функции $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

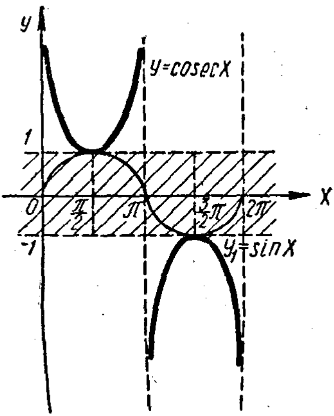


Рис. 96

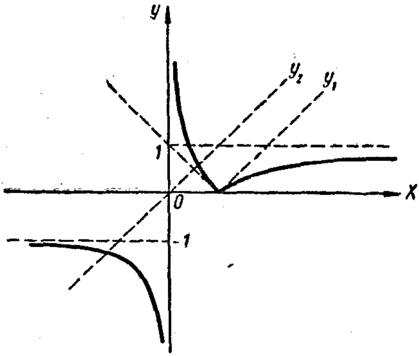


Рис. 97

Прямую $y=1$ строить не будем, но будем иметь в виду, что делимым все время является единица.

$|\sin x|\leqslant 1$, а потому $\left|\dfrac{1}{\sin x}\right|\geqslant 1$, следовательно, график заданной функции лежит вне полосы, заключенной между прямыми $y=1$ и $y=-1$.

На рис. 96 эта полоса заштрихована. В тех точках, где

$$\sin x=1,\ y=\frac{1}{\sin x}=1;$$

$$\sin x=-1,\ y=\frac{1}{\sin x}=-1.$$

При $0<x<\pi$, $\sin x>0$, а потому и $y>0$; при $\pi<$ $<x<2\pi$, $\sin x<0$ и $y=\frac{1}{\sin x}<0$.

Когда $\sin x\to 0$, $\frac{1}{\sin x}\to\infty$. После указанного построение графика очевидно.

2. Построить график функции $y=\frac{|x-1|}{x}$.

Строим графики функций $y_1=|x-1|$ и $y_2=x_2$ (рис. 97).

График заданной функции получим делением соответствующих ординат: $y=\frac{y_1}{y_2}$. При этом следует учесть, что это деление возможно для всех x, кроме $x=0$.

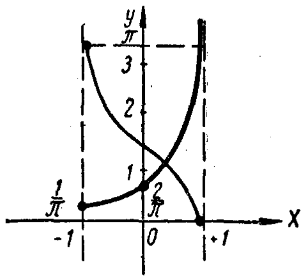


Рис. 98

В точке $y_2=0$ $(y_1\neq 0)$ заданная функция терпит бесконечный разрыв (ось ординат является вертикальной асимптотой).

Заметим, что при $x=1$, $y_1=$ $=0$, $y_2=1$, а потому $y=\frac{y_1}{y_2}=0$.

При $x>1$ $y=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to\infty]{}1$, а потому уравнение $y=1$ является уравнением горизонтальной асимптоты для правой ветви графика.

При $x<1$ $y=\frac{1-x}{x}=\frac{1}{x}-1\xrightarrow[x\to\infty]{}-1$, и уравнение $y=$ $=-1$ является уравнением горизонтальной асимптоты для левой ветви графика.

3. Построить график функции $y=\frac{1}{\arccos x}$.

Строим график функции $y_1=\arccos x$; область ее определения: $-1\leqslant x\leqslant 1$. Знаменатель $y_1=0$ только в одной точке $x=1$; поэтому областью определения заданной функции $y=\frac{1}{\arccos x}=\frac{1}{y_1}$ является полуоткрытый интервал $[-1, 1)$. (В точке $x=1$ функция терпит бесконечный разрыв: при $x\to 1$ $y\to\infty$). Функция y_1 на всем интервале определения убывает. Естественно, что функция $y=\frac{1}{y_1}$ на всем интервале возрастает. Наибольшее значение y_1 имеет при $x=-1$, $y_1=\pi$. Соответственно, наименьшее значение функции $y=\frac{1}{\pi}$. При $x=0$ $y_1=\frac{\pi}{2}$, $y=\frac{2}{\pi}$. Построение графика выполнено на рис. 98.

Упражнения. Построить графики функций:

1. $y=\sec x$.
2. $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.
3. $y=\dfrac{\cos x}{|\cos x|}$.
4. $y=\log_x 2$ (указание: использовать соотношение $\log_x 2=\dfrac{2}{\log_2 x}$).

4. Построение графиков функций вида $y=f[\varphi(x)]$

Мы уже ознакомились с алгебраическим сложением, умножением и делением графиков. Рассмотрим теперь еще несколько примеров, когда в определение функции входит операция взятия функции от функции *.

Примеры.

1. Построить график функции $y=\sqrt{\sin x}$.

Строим график функции $y_1=\sin x$ (при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ — в силу периодичности этой функции с периодом 2π). Там где $\sin x<0$, $y=\sqrt{y_1}$ не существует. Поэтому интервал $\pi<x<2\pi$ должен быть заштрихован. Рассмотрим интервал $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Наибольшее значение y принимает тогда, когда y_1 является наибольшим, т. е. при $x=\frac{\pi}{2}$

$$y_1=\sin\frac{\pi}{2}=1,$$

$$y=\sqrt{1}=1.$$

На концах интервала, т. е. при $x=0$ и $x=\pi$ $y_1=\sin x=\pi$ и $y=\sqrt{y_1}=0$.

---

* Как указывалось в гл. 1, § 4, такие функции называют сложными.

Во всех остальных точках рассматриваемого интервала $0<y_1<1$, а тогда $y=\sqrt{y_1}>y_1$, поэтому график функции y и проходит, как показано на рис. 99.

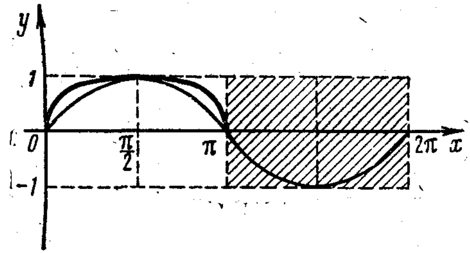


Рис. 99

2. Построить график функции $y=\log_2\log_2 x$.

Задана функция $y=\log_2 y_1$; при $y_1\leqslant 0$ она не существует (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют). Поэтому заштриховываем полуплоскость $x\leqslant 1$. Логарифмическая функция $y_1=\log_2 x$ при основании, большем единицы, является монотонно возрастающей, а потому будет монотонно возрастающей и заданная функция $y=\log_2 y_1$:

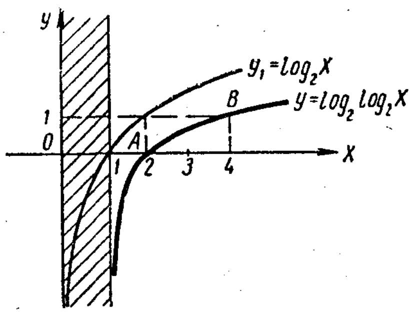


Рис. 100

при $x=2$ $y_1=1$, $y=0$ (точка A);

при $x=4$ $y_1=2$, $y=1$ (точка B),

после чего построение графика затруднений не вызывает (рис. 100).

3. Построить график функции $y=2^{\sin x}$

Строим график функции $y_1=\sin x$ (одну волну синусоиды при $0\leqslant x\leqslant 2\pi$). В тех точках, где

$$y_1=\sin x=0,\ y=2^{y_1}=1;$$

при $\sin x=1$; $y=2$;

при $\sin x=-1$; $y=2^{-1}=\frac{1}{2}$;

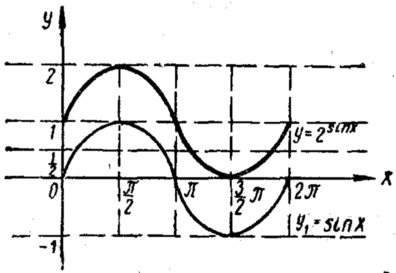


Рис. 101

где возрастает $y_1=\sin x$, там возрастает и $y=2^{y_1}$, а где $y_1=\sin x$ убывает, там убывает и $y=2^{y_1}$.

При $\sin x>0$ $y=2^{\sin x}>1$, а при $\sin x<0$ $y=2^{\sin x}<1$ (по свойствам показательной функции). График заданной функции построен на рис. 101.

4. Построить график функции $y=\arccos\frac{1}{x}$.

По определению функции $y=\arccos y_1$, $|y_1|\leqslant 1$, но $y_1=\frac{1}{x}$, значит $-1\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1$, и областью определения функции $y=\arccos\frac{1}{x}$ являются два интервала: $x\leqslant -1$, $x\geqslant +1$. Заштриховываем полосу $|x|<1$.

При $x=-1$ $y_1=\frac{1}{x}=-1$, $y=\arccos(-1)=\pi$;

при $x=+1$ $y_1=\frac{1}{x}=+1$, $y=\arccos 1=0$;

при $|x|\to\infty$ $\frac{1}{x}\to 0$, $y=\arccos\frac{1}{x}\to\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

График заданной функции построен на рис. 102.

Упражнения. Построить графики функций:

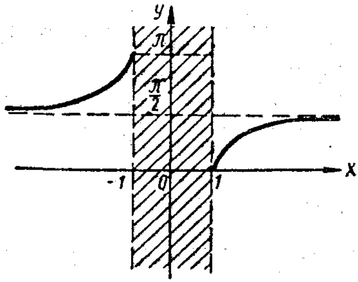


Рис. 102

1. $y = \sqrt[3]{\sin x}$.
2. $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{2}} x$.
3. $y = \log_{\frac{1}{2}} \log_2 x$.
4. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.
5. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.
6. $y = \frac{1}{\arcsin \frac{1}{x}}$.
7. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$.
8. $y = \sqrt{4x - 3 - x^2}$.
9. $y = \log_2 (4x + 5 - x^2)$.
10. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

Вопросы для повторения

1. Что называется преобразованием графика без деформаций?

2. Сформулируйте правило построения графика функции $y = f(x) + a$.

3. Как найти координаты вершины параболы вида $y = ax^2 + bx + c$?

4. Приведите примеры и начертите графики дробно-линейных функций.

5. Приведите примеры и начертите графики четной и нечетной функций.

6. Сформулируйте правило построения графика функции $y = -f(-x)$.

7. Какая функция называется обратной функцией по отношению к данной?

8. Для любой ли функции существует обратная функция?

9. Как построить график обратной функции, если график прямой функции известен?

10. Приведите примеры графиков иррациональных функций вида $y = \sqrt[n]{x}$, где n — натуральное число.

11. Сформулируйте правила построения графиков функций путем сдвига и деформаций.

12. Сформулируйте правила построения графиков функций вида: $y = f(\omega x)$, $y = Af(\omega x)$ для различных значений ω.

13. Приведите примеры простых гармонических колебаний и начертите их графики.

14. Что называется амплитудой колебания, начальной фазой, периодом колебания, угловой скоростью и частотой?

15. Сформулируйте правило построения графика функции вида $y = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

16. Что называется модулем вещественного числа?

17. Сформулируйте правило построения графиков функций вида $y = |f(x)|$, $y = Af(|x|)$.

ГЛАВА V

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК

Как известно, *геометрическим местом точек, обладающих каким-либо свойством, называется множество, в которое входят все точки, обладающие этим свойством, и не входит ни одна точка, этим свойством не обладающая.* В данной главе будут рассматриваться некоторые геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению $F(x, y) = 0$. Легко видеть, например, что уравнению $x^2 + y^2 = 1$ удовлетворяют координаты всех точек окружности единичного радиуса с центром в начале координат и не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащей на этой окружности (поэтому это уравнение и называют уравнением окружности). Все графики функций $y = f(x)$, которые мы строили до сих пор, можно также рассматривать как геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению $y=f(x)$.

Однако не всякое геометрическое место точек можно считать графиком какой-либо функции. Так, в приведенном примере окружность не является графиком никакой функции, так как каждому x (конечно, при $|x|<1$) соответствуют два значения y, равные по величине, но противоположные по знаку. Таким образом, построение геометрических мест точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, является задачей более общей, чем построение графиков функций.

На ряде примеров рассмотрим это обобщение, тем более что иногда приходится встречаться с неправильными формулировками типа: построить график функции $|y| = |x|$. Эта формулировка неверна, так как y здесь не является функцией от x: каждому x соответствует опять-таки два значения y, а не одно.

Установим прежде всего, как найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y| = f(x)$, если график функции $f(x)$ известен.

Заметим, что $|y| \geqslant 0$, а потому те значения x, при которых $f(x) < 0$, для искомого геометрического места точек неприемлемы. (На рис. 103 соответствующие участки заштрихованы.) Для каждого значения x, при котором $f(x) \geqslant 0$, искомому геометрическому месту точек, кроме соответствующей точки графика функции $y=f(x)$, будет принадлежать и точка, ей симметричная относительно оси абсцисс, так как $|-y| = |y|$.

Отсюда можно сформулировать следующее правило:

Для того чтобы построить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y| = f(x)$, надо выделить те участки графика функции

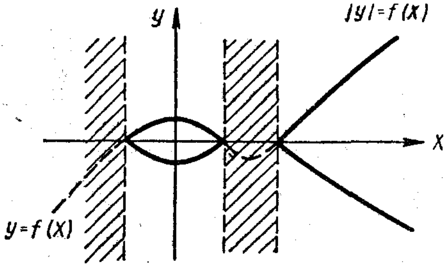


Рис. 103

$y = f(x)$, где $f(x) \geqslant 0$, и достроить к ним их зеркальные отражения относительно оси абсцисс.

Естественно при этом, что для построения графика функции $y = f(x)$ могут применяться все правила, изложенные ранее. Поэтому нет необходимости формулировать правила для построения геометрических мест точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

$$|y| = |f(x)|; \ |y| = f(|x|); \ |y| = |f(|x|)| .$$

Примеры.

Найти геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1. $|y| = 1$.

Строим график функции $y = 1$ (рис. 104), а так как $y = 1 > 0$ при любом x, остается добавить зеркальное отображение этой линии относительно оси абсцисс. Заметим, что полученное геометрическое место точек состоит из двух линий: $y = 1$ и $y = -1$, т. е. «объединяет» графики двух различных функций.

2. $|y| = x$.

Строим график функции $y = x$ (рис. 105). Заштриховываем левую полуплоскость: $|y|$ не может быть отрицательным. Остается добавить к участку графика функции $y = x$ при $x \geqslant 0$ его зеркальное отражение относительно оси абсцисс. Заметим, что полученное геометрическое место точек тоже объединяет графики двух функций: $y = x$ и $y = -x$, но не на всей числовой оси, а только при $x \geqslant 0$.

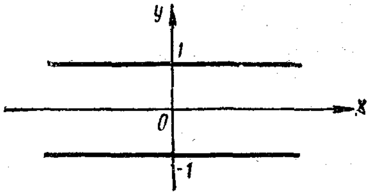


Рис. 104

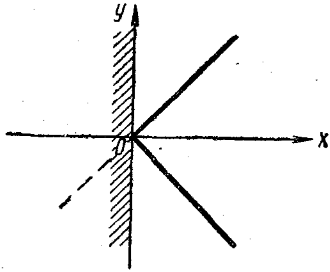


Рис. 105

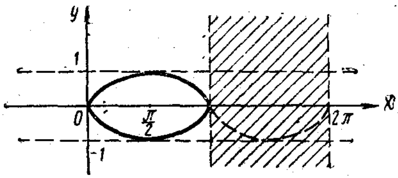


Рис. 106

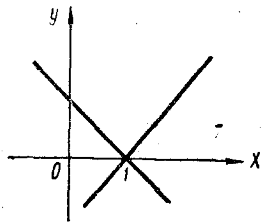


Рис. 107

3. $|y| = \sin x$.

В силу периодичности функции $y = \sin x$ ограничимся рассмотрением ее в пределах одного периода $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. При этом интервал $[\pi, 2\pi]$ (где $\sin x < 0$) придется «закрыть» (рис. 106), а при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ к графику функции $y = \sin x$ достраивается и его зеркальное отражение относительно оси абсцисс.

4. $|y| = |x - 1|$.

Строим график функции $y = |x - 1|$ и изображение симметричное ему относительно оси абсцисс (рис. 107).

5. $|y| = x^2 - 4|x| + 3$.

Строим график функции $y = x^2 - 4|x| + 3$. «Закрываем» те интервалы, где этот график проходит ниже оси абсцисс (т. е. при $y < 0$). А на оставшихся интервалах (при $y \geqslant 0$) достраиваем к графику функции $y = x^2 - 4|x| + 3$ его зеркальное отражение относительно оси абсцисс (рис. 108).

6. $|y| = \log_{\frac{1}{2}} |x|$.

Строим график функции $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$. «Закрываем» те

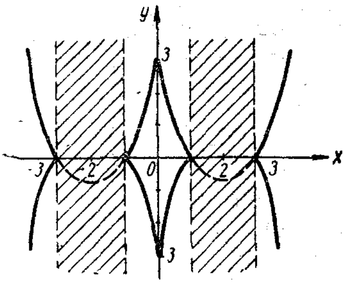


Рис. 108

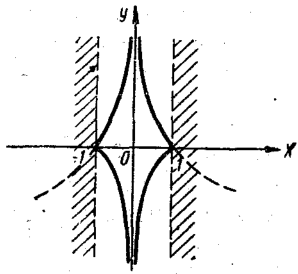


Рис. 109

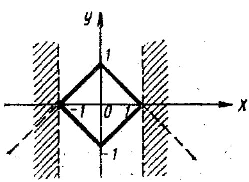


Рис. 110

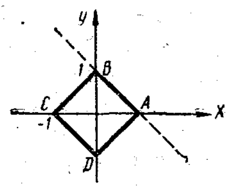


Рис. 111

интервалы, где $\log_{\frac{1}{2}} |x| < 0$ (рис. 109). На интервале $[-1;\ 1]$ достраиваем к графику функции $y = \log_{\frac{1}{2}} |x|$ его зеркальное отражение относительно оси абсцисс.

7. $|x| + |y| = 1$.

Решение 1. Рассмотрим уравнение $|y| = 1 - |x|$. Построим график функции $y = 1 - |x|$; затем закроем те интервалы, где $1 - |x| < 0$, и по соответствующему правилу убедимся в том, что искомым геометрическим местом точек является квадрат (рис. 110).

В этом примере мы прежде всего привели заданное уравнение к виду $|y|=f(|x|)$ для того, чтобы можно было воспользоваться указанным правилом. Однако привести заданное уравнение к указанному виду не всегда возможно.

Решение 2. Рассмотрим заданное уравнение по координатным четвертям.

1) В I четверти $x\geqslant 0$ и $y\geqslant 0$, а потому $|x|=x$ и $|y|=$ $=y$. Тогда заданное уравнение принимает вид $x+y=1$, или $y=1-x$. Это уравнение прямой AB (рис. 111), но проводим эту прямую только в пределах первой четверти.

2) Во II четверти $x\leqslant 0$, $y\geqslant 0$, $|x|=-x$, $|y|=y$ и уравнение принимает вид $-x+y=1$, или $y=x+1$. Т. е. к искомому геометрическому месту точек в пределах второй четверти принадлежит участок BC прямой $y=x+1$.

3) В III четверти уравнение принимает вид $-x-y=1$, или $y=-x-1$. Т. е. к искомому геометрическому месту точек в пределах третьей четверти принадлежит участок CD прямой $y=-x-1$.

4) Аналогично рассматривая уравнение $x-y=1$ или $y=x-1$, в IV четверти получим отрезок DA, замыкающий $ABCD$.

Решение 3. Заметим, что замена x на $-x$ ничего в заданном уравнении не меняет, так как x входит в него только под знаком модуля. А потому искомое геометрическое место точек аналогично графику четной функции и симметрично относительно оси ординат. Условимся в этом случае говорить, что заданное уравнение «четно относительно x». Но очевидно, что заданное уравнение четно и относительно y, а тогда искомое геометрическое место точек симметрично и относительно оси абсцисс. Приведенные соображения существенно облегчают нахождение искомого геометрического места точек. Для этого достаточно найти его часть, лежащую, например, в I координатной четверти (участок AB на рис. 111), а затем, используя указанную симметрию, произвести последовательно два зеркальных отражения относительно каждой из координатных осей.

Таким образом, обнаружение четности заданного уравнения по одной из входящих в него переменных, вдвое сокращает работу по нахождению искомого геометрического места точек, а обнаружение двойной четности (и относительно x и относительно y) сокращает эту работу в 4 раза.

8. $|x| - |y| = 1$.

Здесь можно использовать любое из трех решений, рассмотренных в примере 7. Читателю рекомендуется первое и второе решения этого примера выполнить са-

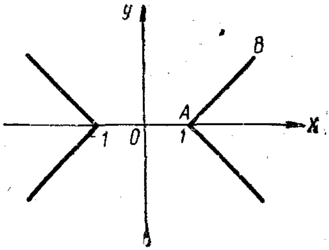


Рис. 112

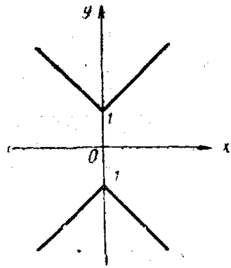


Рис. 113

мостоятельно. Мы, для краткости, рассмотрим только третье решение. Заданное уравнение четно относительно x и относительно y. В I четверти оно принимает вид $x-y=1$, или $y=x-1$. Поэтому искомому геометрическому месту точек (в пределах I четверти) принадлежит участок AB прямой $y = x - 1$.

Производим два отражения этого участка относительно координатных осей (используя двойную четность заданного уравнения) и получаем искомое геометрическое место точек (показано на рис. 112).

9. $|y| - |x| = 1$.

Построение аналогично примеру 8 и выполнено на рис. 113.

Анализ решения рекомендуется провести читателю самостоятельно

10. $||x| - |y|| = 1$.

Заметим, что если модуль какого-либо числа равен 1, то само это число равно или 1 или -1, а потому заданное уравнение распадается на два уравнения: 1) $|x| -$

$-|y|=1$ (см. пример 8) и 2) $|x|-|y|=-1$ или $|y|-$ $-|x|=1$ (см. пример 9).

Таким образом, геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, является объединение двух геометрических мест точек, построенных в примерах 8 и 9 (рис. 114).

Рассмотренные в примерах 7, 8 и 9 геометрические места точек используются в качестве своеобразных «шаблонов», сдвигами которых можно находить некоторые другие геометрические места точек.

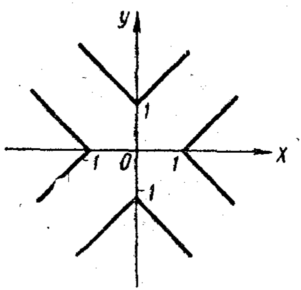


Рис. 114

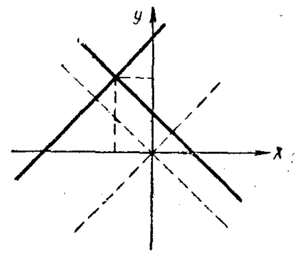


Рис. 115

Из правила 2 следует, что для построения графика функции $y=f(x+a)$ надо график функции $y=f(x)$ сдвинуть (как одно целое) в направлении оси Ox на величину $-a$. А из правила 1 следует, что для построения графика функции $y=f(x)+b$ надо график функции $y=f(x)$ сдвинуть на величину $+b$ в направлении оси ординат. Обобщая данные правила, можно сказать, что замена в уравнении x на $x+a$ приводит к сдвигу геометрического места точек на величину $-a$ в направлении оси абсцисс, а замена y на $y+b$ к сдвигу на величину $-b$ в направлении оси ординат. Это обобщение можно принять без доказательства *.

11. $|y-2|=|x+1|$.

Находим геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y|=|x|$ (на рис. 115

* Доказательство потребовало бы введения параллельного переноса осей координат, что выходит за рамки настоящего пособия.

это геометрическое место точек показано пунктиром) и сдвигаем его на одну единицу влево и на две единицы вверх.

На рис. 114 показано сплошной линией искомое геометрическое место точек.

12. $|x-2|+|y+1|=1$.

Искомое геометрическое место точек получается сдвигом шаблона, построенного в примере 7 данного параграфа, на две единицы вправо и на одну единицу вниз, что и выполнено на рис. 116 (шаблон показан пунктиром).

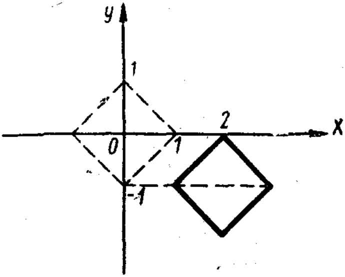


Рис. 116

Замечание. В примерах 7, 8, 9, 10 и 12 в правой части заданного уравнения стояла единица. Замена ее, например, числом 2 в примерах 7 и 12 приведет только к изменению размеров квадрата (вдвое), а в примерах 8, 9 и 10 — к смещению вершин соответствующих углов (координаты этих вершин по абсолютной величине увеличатся вдвое).

$$13.\quad \left|\,|x|+|y|-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$

Это уравнение распадается на два:

1) $|x|+|y|-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$ или $|x|+|y|=2$;

2) $|x|+|y|-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$ или $|x|+|y|=1$,

а потому искомым геометрическим местом является совокупность двух квадратов, показанных на рис. 117.

При решении более сложных примеров следует обращать внимание на четность (для сокращения работы) и проводить исследование по участкам подобно тому, как мы поступили при решении примера 7 (2-е решение).

14. $|y| + y = |x| + x.$

Четностью уравнение не обладает (ни относительно x, ни относительно y). Поэтому рассматриваем его по координатным четвертям.

1) В I четверти $|x| = x$, $|y| = y$. Уравнение принимает вид $y + y = x + x$, или $2y = 2x$, или $y = x$. Отсюда в пределах первой четверти искомому геометрическому месту

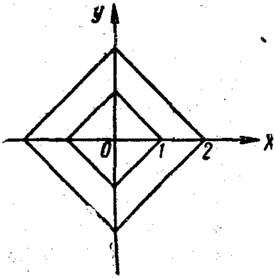


Рис. 117

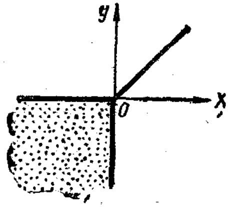


Рис. 118

принадлежит биссектриса первого координатного угла (рис. 118).

2) Во II четверти $|y| = y$, $|x| = -x$; уравнение принимает вид $2y = -x + x$, или $y = 0$, что соответствует отрицательной полуоси абсцисс.

3) В III четверти $|y| = -y$ и $|x| = -x$ и уравнение принимает вид $y - y = x - x$, что выполняется тождественно, а это означает, что искомому геометрическому месту точек принадлежат все точки третьего координатного угла.

4) В IV четверти $|y| = -y$, $|x| = x$ и уравнение принимает вид $-y + y = x + x$, или $x = 0$, что соответствует отрицательной полуоси ординат.

Из этого примера видно, что геометрическим местом точек, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению, могут быть не только линии, но и отдельные участки плоскости координат.

15. $|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|x| - x).$

Уравнение четно относительно y, а потому его достаточно рассмотреть в верхней полуплоскости и воспользоваться затем соответствующим правилом.

1) В I четверти $|y|=y$, $|x|=x$ и уравнение принимает вид $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-x)$, т. е. $y=0$, чему соответствует положительная полуось абсцисс.

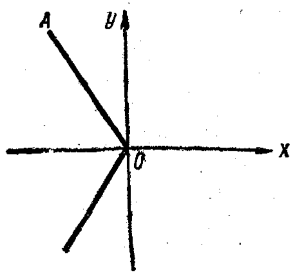


Рис. 119

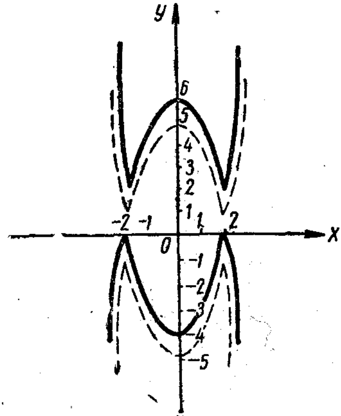


Рис. 120

2) Во II четверти $|y|=y$, $|x|=-x$ и уравнение принимает вид $y=\frac{\sqrt{3}}{2}(-x-x)$, или $y=-\sqrt{3}x$, чему соответствует полупрямая OA (рис. 119). По соответствующему правилу достраивается еще зеркальное отражение относительно оси абсцисс, и таким образом получим искомое геометрическое место точек.

16. $|y-1|=1+|x^2-4|$.

Строим график функции $y=1+|x^2-4|$ (рис. 120). По соответствующему правилу находим геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y|=1+|x^2-4|$. Остается сдвинуть полученные кривые на одну единицу вверх.

17. $|y-1|+|y+1|+2|x|=4$.

Уравнение четно относительно x, поэтому ограничимся рассмотрением его только при $x\geqslant 0$. Однако наличие двух различных модулей $|y-1|$ и $|y+1|$ заставляет рассмотреть три участка изменения y.

1) При $y<-1$ получим: $y+1<0$ и $|y+1|=-(y+1)$: $y-1<0$ и $|y-1|=1-y$ и уравнение принимает вид $-y+1-y-1+2x=4$, или $2y=2x-4$, $y=x-2$.

Соответствующий участок искомого геометрического места точек на рис. 121 обозначен через AB.

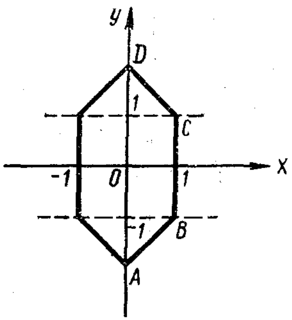


Рис. 121

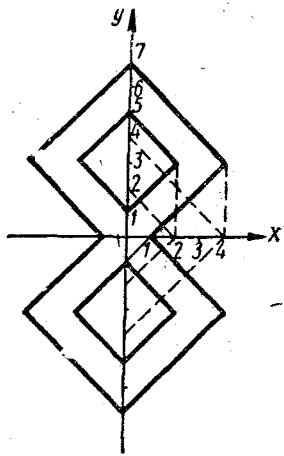


Рис. 122

2) При $-1\leqslant y<1$ получим $-y+1+y+1+2x=4$, или $x=1$ (на рис. 121 отрезок BC).

3) при $y>1$ получим $y-1+y+1+2x=4$, или $y=2-x$ (на рис. 121 отрезок CD).

Остается только достроить зеркальное отражение полученной ломаной относительно оси ординат, и искомое геометрическое место точек будет построено.

18. $||x|+||y|-3|-3|=1$.

В силу двойной четности данного уравнения (относительно x и относительно y рассмотрим его только в первой четверти. Уравнение примет вид

$$|x+|y-3|-3|=1.$$

Полученное уравнение распадается на два:

1) $x+|y-3|-3=1$, или $|y-3|=4-x$;

2) $x+|y-3|-3=-1$, или $|y-3|=2-x$.

Строим графики функций $y=4-x$ и $y=2-x$ (в пределах первой четверти). По правилу находим геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям $|y|=4-x$ и $|y|=2-x$. Сдвигаем полученные ломаные на три единицы вверх и выделяем только ту их часть, которая оказалась в пределах первого координатного угла. Остается дважды отразить эту выделенную часть относительно координатных осей, что и выполнено на рис. 122.

Упражнения. Найти геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям:

1. $|y| = \cos x$.
2. $|y| = \log_3 x$.
3. $|y| = 2^x - 2$.
4. $|y| = -x^2 + 4|x| - 3$.
5. $|y| = \log_2|x-1|$.
6. $|x-1| + |y-2| = 2$.
7. $|x-2| - |y| = 1$.
8. $|y-1| = |x+3|$.
9. $||x| - |y|| = 2$.
10. $||x| + |y| - 3| = 1$.
11. $||y-3| - 5| = ||x| + 2|$.
12. $|x| + |x-a| + |y| = a,\ a > 0$.
13. $|2y-1| + |2y+1| + \frac{4}{\sqrt{3}}|x| = 4$.
14. $|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}(|x-y| + |x+y|) = 1 = \sqrt{2}$.
15. $|y| = |\log_{|x|} 2|$.
16. $|y| + \frac{1}{|y|} = |x| + \frac{1}{|x|}$.

ГЛАВА VI

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОСТРОЕНИИ ГРАФИКОВ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Полярная система координат

Положение произвольной точки плоскости мы до сих пор определяли ее декартовыми координатами x и y. Однако этот способ не является единственным: часто бывает удобнее определять положение точки M на плоско-

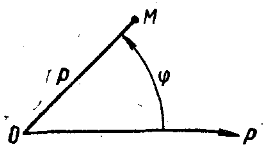


Рис. 123

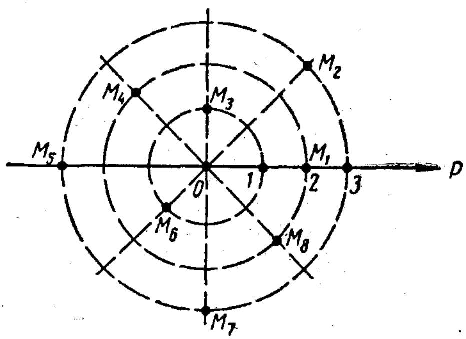


Рис. 124

сти другими величинами. Остановимся на том способе, когда положение точки M на плоскости (рис. 123) определяют расстоянием $\rho = OM$ точки M от полюса O и углом φ между лучом OM и полярной осью OP. Величины ρ и φ называются полярными координатами точки M. Отрезок ρ называют полярным радиусом, а угол φ — полярным углом. Заметим, что всегда $\rho \geqslant 0$.

Очевидно, что заданием ρ и φ положение точки M определяется однозначно: угол φ определяет направление луча OM, а отрезок ρ — положение точки на этом луче. Однако по точке M однозначно определяется лишь расстояние ρ, а угол φ определяется не однозначно: каждой точке M соответствует бесчисленное множество полярных углов, отличающихся друг от друга на $2\pi k$, где k — целое число. Для устранения неоднозначности в качестве полярного угла обычно выбирают наименьший (по абсолютной величине) угол φ, составляемый OM с полярной осью, т. е. выбирают φ в диапазоне от $-\pi$ до $+\pi$ $(-\pi < \varphi \leqslant \pi)$.

Исключение — случай, когда точка M совпадает с полюсом O и $\rho = 0$, а полярный угол φ может быть взят каким угодно.

На рис. 124 в качестве примера указаны точки с полярными координатами:

$$M_1(2, 0), M_2\left(3, \frac{\pi}{4}\right), M_3\left(1, \frac{\pi}{2}\right), M_4\left(2, \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$M_5(3, \pi), M_6\left(2, -\frac{3\pi}{4}\right), M_7\left(3, -\frac{\pi}{2}\right), M_8\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

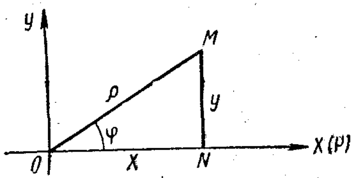


Рис. 125

Установим связь между полярными (ρ и φ) и декартовыми (x и y) координатами точки M. Для этого совместим полюс с началом координат, а полярную ось — с осью абсцисс (рис. 125).

Из ΔOMN имеем

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi; \\ y &= \rho\sin\varphi. \end{aligned}\right\} (1) \qquad \left.\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) позволяют осуществить переход от полярной системы координат к декартовой и наоборот.

До сих пор мы строили графики функций в декартовой системе координат. Соответствующие построения можно производить и в полярной системе: если переменные ρ и φ связаны функциональной зависимостью, то, изображая значение φ полярными углами и откладывая на определяемых ими лучах отрезки, равные соответствующим значениям ρ, получим геометрическое место точек с координатами ρ и φ, образующих линию, называемую полярной диаграммой или графиком заданной функции в полярной системе координат. Особенно удобно прибегнуть к полярной диаграмме, если переменная φ фактически является (а не только изображается) углом.

Например, известно, что сила света электрической лампы накаливания неодинакова по различным направлениям. Эта зависимость (в вертикальной плоскости) показана на полярной диаграмме рис. 126.

Упражнения. 1. Построить точки по их полярным координатам:

$$M_1\left(2, \frac{\pi}{3}\right), M_2\left(1, \frac{\pi}{6}\right), M_3\left(1, -\frac{\pi}{2}\right), M_4\left(3, -\frac{\pi}{6}\right),$$

$$M_5(3, 0), M_6\left(2, \frac{2\pi}{3}\right), M_7\left(1, -\frac{2\pi}{3}\right), M_8\left(2, -\frac{\pi}{4}\right).$$

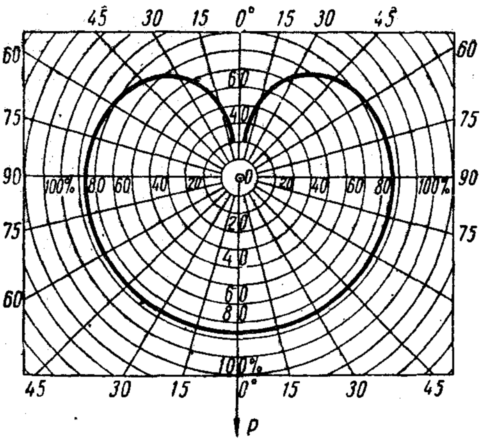


Рис. 126

2. Найти полярные координаты вершин ромба, диагонали которого равны 2 и 4, расположив полюс в точке пересечения диагоналей ромба и направив полярную ось по меньшей из диагоналей.

3. Найти декартовы координаты точек по их полярным координатам:

$$M_1\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right), M_2\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right), M_3\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right), M_4\left(2, -\frac{\pi}{3}\right).$$

4. Найти полярные координаты точек по их декартовым координатам:

$$M_1(3, 4), M_2(5, -12), M_3(-1, -1), M_4(-4, 3).$$

§ 2. Графики некоторых кривых в полярной системе координат

С методикой построения графиков в полярной системе координат мы кратко ознакомимся, рассмотрев построение ряда кривых, обычно определяемых их полярными уравнениями. К таким кривым относятся, прежде всего, разного рода спирали.

1. Спираль Архимеда

Рассмотрим полярную диаграмму, определяемую уравнением $\rho = a\varphi$, где a — некоторая положительная

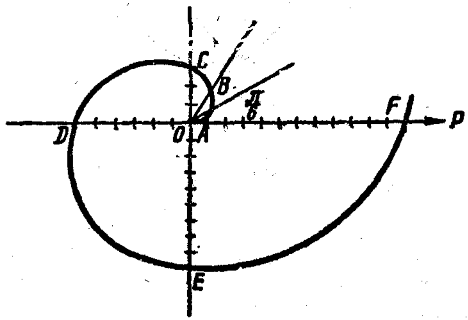


Рис. 127

постоянная (коэффициент пропорциональности). Для построения графика этой функции найдем несколько ее точек, записывая расчеты в табл. 20.

Таблица 20

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
ρ	0	$a\frac{\pi}{6}$	$a\frac{\pi}{3}$	$a\frac{\pi}{2}$	$a\pi$	$a\frac{3}{2}\pi$	$a2\pi$

Отрезок $\frac{a\pi}{6}$ обозначим OA; тогда

$$a\frac{\pi}{3} = 2OA,\ a\frac{\pi}{2} = 3OA,\ a\pi = 6OA,\ \frac{3}{2}a\pi = 9OA,$$

$$2a\pi = 12OA.$$

Откладывая эти отрезки на соответствующих лучах, получим точки A, B, C, D, E, F, принадлежащие графику функции $\rho = a\varphi$. Соединяя полученные точки плавной кривой (рис. 127), получим спираль Архимеда.

Свойства этой спирали впервые были изучены Архимедом. Одним из этих свойств является постоянство расстояний между витками. Аргумент φ может расти

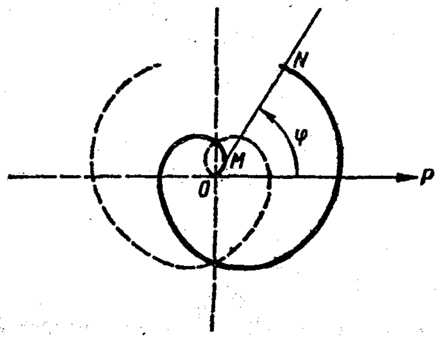


Рис. 128

безгранично, а потому кривая имеет бесконечное множество витков. Определим расстояние между двумя соседними витками MN по произвольному лучу (рис. 128).

$$OM = a\varphi;$$

$$ON = a(\varphi + 2\pi);$$

$$MN = ON - OM = a(\varphi + 2\pi) - a\varphi = 2a\pi.$$

Полученное выражение от φ не зависит, так как $MN = 2a\pi$ при любом φ.

Таким образом, в полярной системе координат Архимедова спираль имеет весьма простое уравнение: $\rho = a\varphi$, и построение ее графика никаких затруднений не вызывает.

Воспользуемся формулами перехода $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ и получим вместо $\rho = a\varphi$ гораздо более сложное уравнение

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$$

Из уравнения видно, что построение графика этой функции в декартовой системе координат было бы крайне затруднительно.

2. Логарифмическая спираль *

Так называется кривая, задаваемая в полярной системе координат уравнением

$$\rho = a^{\varphi}.$$

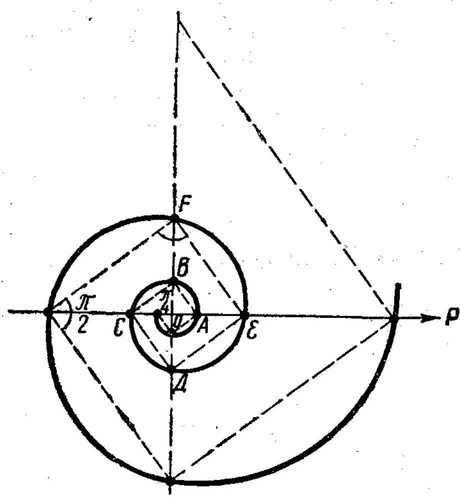


Рис. 129

Если аргумент φ изменять по закону арифметической прогрессии: φ_0, φ_0+d; φ_0+2d; ..., то значения φ будут:

$$a^{\varphi_0};\ a^{\varphi_0+d} = a^{\varphi_0} a^d;\ a^{\varphi_0+2d} = a^{\varphi_0}\left(a^d\right)^2; \ldots,$$

т. е. функция ρ будет возрастать в геометрической прогрессии со знаменателем $q=a^d$, откуда и вытекает способ построения логарифмической спирали.

Отложим на полярной оси $OA=a^0$ (рис. 129), а на

* Логарифмическая спираль впервые упоминается у Декарта. Независимо от Декарта открыл ее и Торичелли. Особое внимание уделил логарифмической спирали Я. Бернулли, называвший ее «spira mirabilis» — дивная спираль.

прямой, перпендикулярной к ней, $OB=a^{\frac{\pi}{2}}$. Если теперь построить прямую ломаную $ABCDE...$, то из подобия треугольников видно, что отрезки OA, OB, OC, ... образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $a^{\frac{\pi}{2}}$, т. е. полученные точки A, B, C, D, E, ... лежат на логарифмической спирали. Когда φ возрастает от 0 до ∞, точка кривой делает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса, неограниченно удаляясь от него (расстояния между витками уже не одинаковы!). Угол φ может принимать и отрицательные значения. Когда $\varphi \to -\infty$, $\rho \to 0$ и кривая совершает бесчисленное множество оборотов вокруг полюса, безгранично к нему приближаясь, но никогда его не достигая, т. е. полюс для логарифмической спирали является асимптотической точкой.

3. Гиперболическая спираль

Гиперболическая спираль определяется полярным уравнением $\rho=\frac{a}{\varphi}$. При $\varphi \to \infty$ $\rho \to 0$, т. е. полюс является

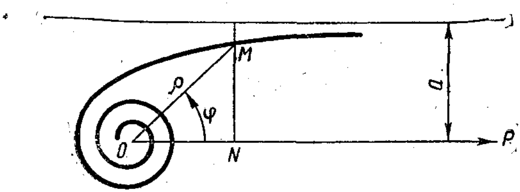


Рис. 130

асимптотической точкой гиперболической спирали. Из $\triangle OMN$ следует, что $MN=\rho \sin \varphi$, но $\rho=\frac{a}{\varphi}$, и потому $MN=\frac{a \sin \varphi}{\varphi}$. Можно доказать*, что при $\varphi \to 0$ $MN \to a$, т. е. прямая, параллельная полярной оси и отстающая от нее на расстоянии, равном a, является асимптотой гиперболической спирали, изображенной на рис. 130.

---

* Для доказательства проще всего использовать так называемый «первый замечательный предел».

4. Четырех- и трехлепестковые розы *

Рассмотрим графики функций:

$$\rho = a\sin 2\varphi \text{ и } \rho = a\sin 3\varphi.$$

Построение этих кривых можно выполнить по точкам, где φ принимает значения от 0 до 2π. Полученные кри-

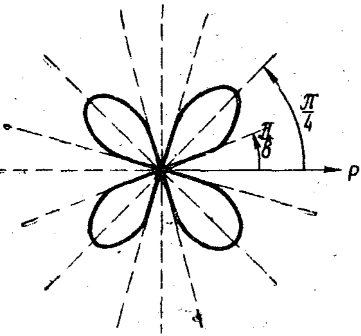


Рис. 131

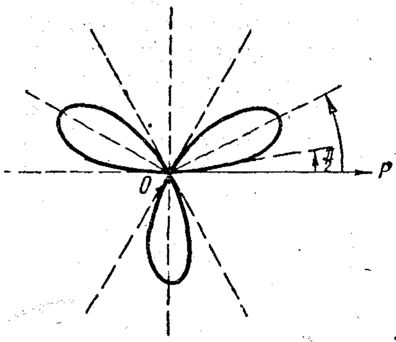


Рис. 132

вые называются четырех- и трехлепестковой розами. Они построены на рис. 131 ** и 132.

5. Улитка Паскаля

Улиткой Паскаля называется кривая, определяемая уравнением $\rho = 2r\cos\varphi + l$. Для построения графика этой кривой обратим внимание на то, что при $l=0$ $\rho = 2r\cos\varphi$, а из рис. 133 очевидно, что $OM = 2r\cos\varphi$, а

---

* Исследованием «роз» впервые занимался Гвидо Гранди, давший первое математическое исследование формы цветов и листьев.

** На этом рисунке и на рис. 133 построения выполнены в так называемой обобщенной полярной системе координат, которая отличается от обычной полярной системы координат тем, что ρ может быть и отрицательным. В этом случае абсолютная величина ρ откладывается в сторону противоположную лучу с полярным углом φ.

потому графиком этой кривой является окружность радиуса r (полюс O находится в левом конце диаметра этой окружности, а полярная ось направлена по диаметру).

Теперь для построения точек, принадлежащих улитке Паскаля, надо в каждом положении полярного радиуса-вектора $\rho=2r\cos\varphi$ достроить к нему отрезок l. На рис. 134 выполнены эти построения для трех случаев: $l<2r$, $l=2r$ и $l>2r$.

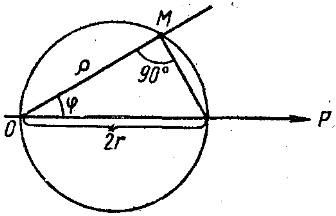


Рис. 133

В случае $l=2r$ улитка Паскаля называется кардиоидой и имеет уравнение вида

$$\rho=2r\cos\varphi+2r=2r(1+\cos\varphi).$$

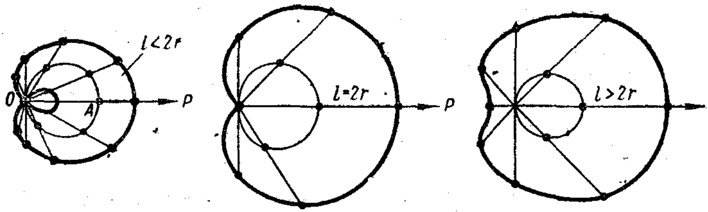


Рис. 134

6. Лемниската Бернулли *

Лемнискатой называется геометрическое место точек M, произведение расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная.

Расположим фиксированные точки (фокусы лемнискаты) F_1 и F_2 на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Обозначим расстояние между ними $F_1F_2=2a$. Тогда эти точки будут иметь координаты $F_1(-a, 0)$, $F_2(a, 0)$ (рис. 135). Для произвольной точки

* Уравнение лемнискаты впервые встречается у Я. Бернулли, в честь которого и названа кривая.

лемнискаты $M(x, y)$, по ее определению, должно выполняться: $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$. Используя формулу расстояния между двумя точками $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, получим:

$$\sqrt{(x+a)^2+y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2+y^2} = a^2.$$

После возведения правой и левой частей полученного уравнения в квадрат и упрощений получим:

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0.$$

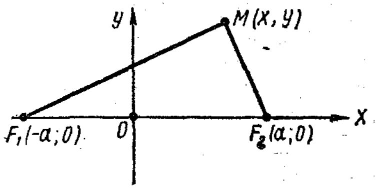


Рис. 135

Исследовать кривую по этому уравнению в декартовой системе координат довольно сложно. Если же перейти к полярным координатам, то уравнение примет более простой вид:

$$(\rho^2)^2 = 2a^2(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi) \text{ или } \rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi.$$

Итак, полярное уравнение кривой имеет вид

$$\rho^2 = b^2\cos 2\varphi,$$

где $2a^2=b^2$. Так как максимальное значение $\cos 2\varphi$ равно единице, то максимальная величина ρ есть b.

Если $\cos 2\varphi$ отрицателен, то ρ — мнимая величина. Таким образом, между прямыми, образующими углы 45° и 135° с полярной осью, нет точек кривой.

Если вместо φ подставить $(-\varphi)$, то уравнение не изменится. Отсюда следует, что кривая симметрична относительно полярной оси.

Если $\rho=0$, то $\cos 2\varphi=0$ и $\varphi=45°$ или 135°, следовательно, кривая проходит через полюс при этих значениях угла.

Можно также найти область существования этой функции, т. е. множество тех значений аргумента φ, при которых функция имеет вещественное значение: $\rho^2 \geqslant 0$, а потому должно быть и $\cos 2\varphi \geqslant 0$, откуда $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leqslant$

$\leqslant 2\varphi \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где k — целое число, или $-\frac{\pi}{4}\pi k \leqslant$ $\leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4} + \pi k$.

Проведя биссектрисы координатных углов, выделим те секторы, в которых кривая существует (рис. 136). Дальнейшее построение кривой выполняется по точкам.

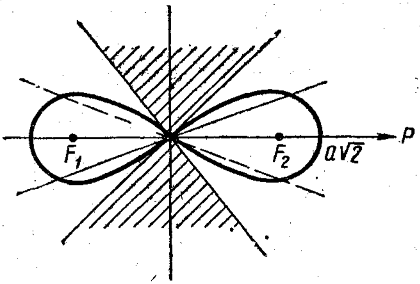


Рис. 136

Название этой кривой — лемниската происходит от греческого слова повязка, бант.

Упражнения. Построить графики следующих кривых в полярной системе координат:

1. $\rho = 2\varphi$.
2. $\rho = \frac{2}{\varphi}$.
3. $\rho = 2^{\varphi}$.
4. $\rho = \frac{1}{2}\sin 2\varphi$; $\rho = \sin 2\varphi$; $\rho = 2\sin 2\varphi$.
5. $\rho = \sin 2\varphi$; $\rho = \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right)$; $\rho = \cos 2\varphi$.
6. $\rho = 2\cos 3\varphi$.
7. $\rho = 2(1+\cos\varphi)$; $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.
8. $\rho = 2(1+\sin\varphi)$; $\rho = 2(1-\sin\varphi)$.
9. $\rho^2 = 8\cos 2\varphi$.

Вопросы для повторения

1. Как определяется положение точки на плоскости в полярной системе координат?

2. Что называется полярной осью, полярным радиусом, полярным углом?

3. Какова связь между декартовыми и полярными координатами?

4. Что называется полярной диаграммой?

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурский И. П. Функции и построение графиков. Учпедгиз, 1961.
2. Гайдуков И. И. Абсолютная величина. «Наука», 1964.
3. Сивашинский И. Х. Элементарные функции и графики. «Просвещение», 1965.
4. Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Школ Э. Э. Функции и графики. «Наука», 1965.
5. Шилов Г. Е. Как строить графики? «Наука», 1965.
6. Макарычев Ю. Н. Система изучения элементарных функций в старших классах средней школы. «Просвещение», 1964.
7. Кочетков Е. С. и Кочеткова О. С. Алгебра и элементарные функции. «Просвещение», 1965.